

2025 年全国高中数学联赛（四川预赛）试题

参考答案及评分标准

说明：

1、本试卷满分 120，其中填空题 64 分，解答题 56 分.

2、评阅试卷时，请依据评分标准. 填空题只设 8 分和 0 分两档；第 9 题 4 分一个档次、第 10 题和第 11 题均为 5 分一个档次. 请严格按照评分标准规定的评分档次给分，不要再增加其它中间档次.

3、如果考生的解答题方法和本解答不同，只要思路合理，步骤正确，在评阅时可参考本评分标准评分.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，满分64分.

1、0 2、4 3、 $2\sqrt{5}$ 4、 $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 5、8 6、 $4\sqrt{2}$ 7、1135 8、819.

二、解答题：本大题共3小题，满分56分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9、（本题满分 16 分）已知抛物线 $\Gamma: y = x^2$ 上三个不同点 $A(1,1)$ 、 B 、 C 满足： $AB \perp AC$ ，过 B 、 C 分别作抛物线 Γ 的切线交于点 P ，求点 P 的轨迹方程.

解：设点 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ，直线 BC 的方程为： $y = kx + m$ ，

$$\text{联立} \begin{cases} y = x^2 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{ 消去 } y,$$

$$\text{得 } x^2 - kx - m = 0,$$

$$\text{由韦达定理知： } x_1 + x_2 = k, \quad x_1 x_2 = -m,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = k^2 + 2m, \quad y_1 y_2 = m^2. \quad \text{-----4 分}$$

$$\text{由 } AB \perp AC \text{ 知： } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0,$$

$$\therefore (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (y_1 - 1)(y_2 - 1) = 0,$$

$$\text{即 } x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 + y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1 = 0.$$

$$\therefore -m - k + 1 + m^2 - (k^2 + 2m) + 1 = 0, \text{ 即 } m^2 - 3m - k^2 - k + 2 = 0.$$

$$\therefore m = k + 2 \text{ 或 } m = -k + 1. \quad \text{-----8 分}$$

若 $m = -k + 1$ ，此时直线 BC 的方程为： $y = k(x - 1) + 1$ ，过点 $A(1,1)$ ，舍去；

$$\therefore m = k + 2. \text{ 此时直线 } BC \text{ 的方程为： } y = k(x + 1) + 2, \text{ 过定点 } (-1, 2). \quad \text{-----12 分}$$

∵ 过点 B 的切线方程为: $y - y_1 = 2x_1(x - x_1)$ ①

过点 C 的切线方程为: $y - y_2 = 2x_2(x - x_1)$ ②

联立①、②解得: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{2}$, $y = x_1 x_2 = -m$, 即 $P(\frac{k}{2}, -m)$.

结合 $m = k + 2$ 知, 点 P 的轨迹方程为 $2x + y + 2 = 0$. -----16 分

10、(本题满分 20 分) 设四面体 $ABCD$ 满足: AD 、 BD 、 CD 两两垂直, 点 O 、 H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心.

求证: $\frac{|AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |OD|^2}{|AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 - |OH|^2}$ 是定值.

证法一: 设 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径, 则 $|OA| = |OB| = |OC| = R$.

(1) 先证明: $|AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 - |OH|^2 = 3R^2$.

记 $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$.

如图, 作 $BE \perp AC$ 于 E , $CF \perp AB$ 于 F ,

则 A, F, H, E 四点共圆; B, F, E, C 四点共圆.

于是, $\angle AHF = \angle AEF = \angle B$.

故 $|AH| = \frac{|AF|}{\sin \angle AHF} = \frac{b \cdot |\cos A|}{\sin B} = 2R \cdot |\cos A|$.

同理, $|BH| = 2R \cdot |\cos B|$, $|CH| = 2R \cdot |\cos C|$.

接下来证明: $|OH|^2 = R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C)$.

不妨设 $A < 90^\circ$ (当 $A \geq 90^\circ$ 时类似可证得上式).

熟知: H, O 为一对等角共轭点, 即 $\angle BAO = \angle CAH$,

据此易知 $\angle HAO = |B - C|$. 在 $\triangle HAO$ 中利用余弦定理知,

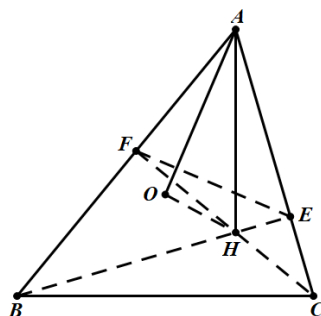
$$|OH|^2 = R^2 + (2R \cdot \cos A)^2 - 2 \cdot R \cdot 2R \cos A \cdot \cos(B - C)$$

$$= R^2(1 + 4\cos^2 A - 4\cos A \cos(B - C))$$

$$= R^2(1 - 4\cos A(\cos(B + C) + \cos(B - C)))$$

$$= R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C).$$

-----5 分



注意到恒等式: $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1$,

$$\begin{aligned} \therefore |AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 - |OH|^2 \\ &= 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C) - R^2(1 - 8\cos A \cos B \cos C) \\ &= 4R^2(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C - \frac{1}{4}) \\ &= 4R^2(1 - \frac{1}{4}) = 3R^2. \end{aligned} \quad \text{-----10 分}$$

$$(2) \text{ 再证明: } |AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |OD|^2 = 5R^2.$$

如图, 将四面体 $ABCD$ 补成一个立方体, 设 Q 是四面体 $ABCD$ 的外接球球心, 点 P 使得 Q 是 DP 的中点, 且设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

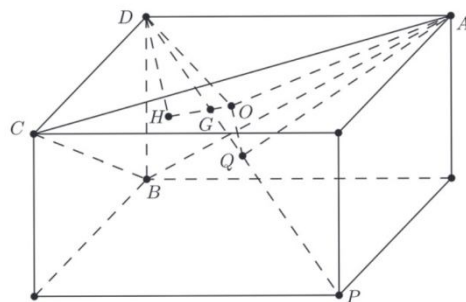
因为 $|OA| = |OB| = |OC|$, $|QA| = |QB| = |QC|$,

所以 $OQ \perp$ 平面 ABC .

因为 G 是 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\text{所以 } 3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DP} = 2\overrightarrow{DQ},$$

则 D, G, Q 共线, 且 $|GD| = 2|GQ|$.



根据平面几何中的欧拉定理, H, G, O 三点共线, 且 $|GH| = 2|GO|$.

所以 $\triangle DHG$ 和 $\triangle QOG$ 相似, 且 $|HD| = 2|OQ|$.

因此, $HD \parallel OQ$, 进而 $HD \perp$ 平面 ABC . -----15 分

$$\begin{aligned} \text{故 } |OD|^2 &= |OH|^2 + |HD|^2 = (3|OG|)^2 + (2|OQ|)^2 = 9(|OG|^2 + |OQ|^2) - 5|OQ|^2 \\ &= 9|QG|^2 - 5|OQ|^2 = |QD|^2 - 5|OQ|^2. \end{aligned}$$

$$\text{因为 } |AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 = |PD|^2 = 4|QD|^2,$$

$$\text{所以 } |AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |OD|^2 = 5(|QD|^2 - |OQ|^2)$$

$$= 5(|QA|^2 - |OQ|^2) = 5|OA|^2 = 5R^2.$$

$$\text{由 (1)、(2) 知 } \frac{|AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |OD|^2}{|AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 - |OH|^2} = \frac{5R^2}{3R^2} = \frac{5}{3}. \quad \text{-----20 分}$$

证法二：由于 DA, DB, DC 两两垂直，以 D 为原点， DA, DB, DC 分别为 x 轴、 y 轴和 z 轴建立空间直角坐标系. 则 $D(0,0,0)$ ，设 $A(a,0,0)$ ， $B(0,b,0)$ ， $C(0,0,c)$ 。

则平面 ABC 的方程为： $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 。

设 H 点的坐标为 (x,y,z) ，由 $AH \perp BC$ ，得 $-by + cz = 0$ ，

由 $BH \perp AC$ ，得 $-ax + cz = 0$ ，即 $ax = by = cz$ ，结合 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ，

得 H 点的坐标为：

$$\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}, \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \right). \quad \text{-----5 分}$$

设 O 点坐标为 (x_0, y_0, z_0) ，则

$$(x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2 = x_0^2 + (y_0 - b)^2 + z_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - c)^2,$$

故 $2by_0 = 2ax_0 + b^2 - a^2$ ， $2cz_0 = 2ax_0 + c^2 - a^2$ ，代入平面方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ，

解得 O 点坐标为：

$$\left(\frac{a^3(b^2 + c^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}, \frac{b^3(a^2 + c^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}, \frac{c^3(a^2 + b^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \right). \quad \text{-----10 分}$$

$$\therefore R^2 = |OA|^2 = (x_0 - a)^2 + y_0^2 + z_0^2 = \frac{\sum_{cyc} a^6b^4 + \sum_{cyc} a^6c^4 + 2\sum_{cyc} a^6b^2c^2 + 4\sum_{cyc} a^4b^4c^2}{4(\sum_{cyc} a^2b^2)^2}.$$

$$\therefore |AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |OD|^2$$

$$= \sum_{cyc} a^2 + \frac{\sum_{cyc} a^6b^4 + \sum_{cyc} a^6c^4 + 2\sum_{cyc} a^6b^2c^2}{4(\sum_{cyc} a^2b^2)^2}$$

$$= \frac{4\sum_{cyc} a^2 \cdot (\sum_{cyc} a^4b^4 + 2\sum_{cyc} a^4b^2c^2) + \sum_{cyc} a^6b^4 + \sum_{cyc} a^6c^4 + 2\sum_{cyc} a^6b^2c^2}{4(\sum_{cyc} a^2b^2)^2}$$

$$= \frac{4\sum_{cyc} a^6b^4 + 4\sum_{cyc} a^2b^4c^4 + 4\sum_{cyc} a^6c^4 + 8\sum_{cyc} a^6b^2c^2 + 16\sum_{cyc} a^4b^4c^2 + \sum_{cyc} a^6b^4 + \sum_{cyc} a^6c^4 + 2\sum_{cyc} a^6b^2c^2}{4(\sum_{cyc} a^2b^2)^2}$$

$$= \frac{5 \sum_{\text{cyc}} a^6 b^4 + 5 \sum_{\text{cyc}} a^6 c^4 + 10 \sum_{\text{cyc}} a^6 b^2 c^2 + 20 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^4 c^2}{4 \left(\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 \right)^2} = 5R^2. \quad \text{-----15 分}$$

$$\begin{aligned} & \text{又} \because |AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 - |OH|^2 \\ &= \frac{\sum_{\text{cyc}} a^6 (b^2 + c^2)^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^4 c^2}{\left(\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 \right)^2} - \frac{\sum_{\text{cyc}} (a^3 b^2 + a^3 c^2 - 2ab^2 c^2)^2}{4 \left(\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 \right)^2} \\ &= \frac{4 \sum_{\text{cyc}} a^6 b^4 + 8 \sum_{\text{cyc}} a^6 b^2 c^2 + 4 \sum_{\text{cyc}} a^6 c^4 + 8 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^4 c^2}{4 \left(\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 \right)^2} \\ &\quad - \frac{\sum_{\text{cyc}} a^6 b^4 + \sum_{\text{cyc}} a^6 c^4 + 4 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^4 c^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} a^6 b^2 c^2 - 4 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^4 c^2 - 4 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^2 c^4}{4 \left(\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 \right)^2} \\ &= \frac{3 \sum_{\text{cyc}} a^6 b^4 + 3 \sum_{\text{cyc}} a^6 c^4 + 6 \sum_{\text{cyc}} a^6 b^2 c^2 + 12 \sum_{\text{cyc}} a^4 b^4 c^2}{4 \left(\sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 \right)^2} = 3R^2. \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{|AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2 + |OD|^2}{|AH|^2 + |BH|^2 + |CH|^2 - |OH|^2} = \frac{5R^2}{3R^2} = \frac{5}{3}. \quad \text{-----20 分}$$

注：如果猜测出定值为 $\frac{5}{3}$ ，可以给 5 分.

11、（本题满分 20 分）给定奇质数 p ，设数列 $\{f_n\}$ 满足：

$$f_1 = f_2 = 1, \text{ 且 } f_{n+2} = f_{n+1} + f_n (n \in \mathbf{N}^*).$$

$$\text{求证： } p \mid (p-1)! \sum_{n=1}^{p-1} \frac{f_n}{n}.$$

证明：先证一个引理.

引理：已知 $a, x, y \in \mathbf{R}$ ，且 $x + y = 1$. 若对任意正整数 n ， $t_n = a(x^n - y^n)$ 均为整数，

$$\text{则对任意奇质数 } p, \text{ 有 } (p-1)! \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a(x^n - y^n)}{n} \equiv 0 \pmod{p}. \quad \text{-----5 分}$$

引理的证明：

$$\text{注意到 } \sum_{n=1}^{p-1} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(1-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1 + \sum_{k=1}^n C_n^k (-x)^k}{n} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n C_n^k (-x)^k.$$

注意到 $\frac{1}{n}C_n^k = \frac{1}{k}C_{n-1}^{k-1}$ ($k \geq 1$), $\sum_{n=k}^{p-1} C_{n-1}^{k-1} = C_{p-1}^k$,

$$\text{所以, } \sum_{n=1}^{p-1} \frac{y^n - 1}{n} = \sum_{n=1}^{p-1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} C_{n-1}^{k-1} (-x)^k = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} (-x)^k \sum_{n=k}^{p-1} C_{n-1}^{k-1} = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} (-x)^k C_{p-1}^k.$$

$$\text{从而 } a \sum_{n=1}^{p-1} \frac{x^n - y^n}{n} = a \sum_{n=1}^{p-1} \frac{x^n - (-x)^n C_{p-1}^n - 1}{n}.$$

$$\text{同理, } a \sum_{n=1}^{p-1} \frac{x^n - y^n}{n} = a \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-y)^n C_{p-1}^n + 1 - y^n}{n}.$$

$$\therefore 2 \sum_{n=1}^{p-1} \frac{ax^n - ay^n}{n} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{ax^n - ay^n - a[(-x)^n - (-y)^n] C_{p-1}^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} (ax^n - ay^n) - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{C_{p-1}^n (-1)^n}{n} (ax^n - ay^n)$$

$$= \sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n} t_n [1 - C_{p-1}^n (-1)^n]. \quad \text{-----10 分}$$

$$\text{熟知 } C_{p-1}^n = \frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n)}{n!} \equiv (-1)^n \pmod{p},$$

$$\therefore p \mid [1 - C_{p-1}^n (-1)^n],$$

$$\therefore p \mid (p-1)! \cdot 2 \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a(x^n - y^n)}{n},$$

$$\therefore (p-1)! \sum_{n=1}^{p-1} \frac{a(x^n - y^n)}{n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

引理得证. -----15 分

回到原题:

$$\text{注意到: } f_n = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \text{ 记 } a = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad y = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

则 $x+y=1$, 且对任意正整数 n , f_n 均为整数,

$$\text{由引理知: } (p-1)! \sum_{n=1}^{p-1} \frac{f_n}{n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$\therefore p \mid (p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} \frac{f_n}{n}. \quad \text{-----20 分}$$