2024 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨 2024 年全国高中数学联合竞赛 一试（A 卷）试题分析

一、填空题：本大题共 8 小题，每小题 8 分，满分 64 分.

1. 若实数 $m>1$ 满足 $\log_9(\log_8 m)=2024$，则 $\log_3(\log_2 m)$ 的值为_________.

答案：4049

分析：本题考察对数运算，执果索因，对目标式往条件式转化即可.

解：$\log_3(\log_2 m)=\log_3(3\log_{2^3} m)=1+\log_3(\log_8 m)=1+2\log_{3^2}(\log_8 m)=4049$.

注：本题易错点在于，式子是两个对数运算的嵌套，需要一层一层"剥开"，而非乘积；同时也要注意换底后的系数，容易化错。

2. 设无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 满足 $0<|q|<1$．若 $\{a_n\}$ 的各项和等于 $\{a_n\}$ 各项的平方和，则 a_2 的取值范围是_________.

答案：$\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup(0,2)$

分析：本题考察数列基本公式及求函数值域.

解：$\{a_n\}$ 各项的平方依次构成首项为 a_1^2，公比为 q^2 的等比数列，考察两个无穷等比数列的各项和，则有：$\frac{a_1}{1-q}=\frac{a_1^2}{1-q^2}$，即 $a_1=1+q$，转化为求 $a_2=q^2+q$ 在 $-1<q<1$ 且 $q\neq 0$ 的值域，易得 $a_2\in\left[-\frac{1}{4},0\right)\cup(0,2)$.

注：本题易错点有两个，第一是公比 q 不能取到 0，第二是等比数列 a_2 不能取到 0，有很多考生出错。

3. 设实数 a,b 满足：集合 $A=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,x^2-10x+a\leq 0\right\}$ 与 $B=\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle|\,bx\leq b^3\right\}$ 的交集为 $[4,9]$，则 $a+b$ 的值为_________.

答案：7.

分析：本题考察函数. 分析两个集合的性质，从交集信息给出具体 a,b 关系.

解：讨论 b 的符号，知 $B=\begin{cases}\left(-\infty,b^2\right],b>0\\ \mathbf{R}\qquad\quad,b=0\\ \left[b^2,+\infty\right),b<0\end{cases}$，而 A 又是以二次函数零点为端点的闭区间（且两端点之和为10），这表明 $A\cap B$ 的两端点要么是 A 的两端点（$4+9\neq 10$，舍），要么是 b^2 和 A 的一个端点，这表明 $|b|=2,a=9$ 或 $|b|=3,a=24$，检验知前者成立，有 $b+a=-2+9=7$.

注：区间问题，需要特别注意区间的开闭。另外本题勿忘记检验情况，否则还会多出一个 $a+b=27$ 的错误答案。

4. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，若 $PA\perp$ 底面 ABC，且棱 AB,BP,BC,CP 的长分别为 1, 2, 3, 4，则该三棱锥的体积为_________.

答案：$\dfrac{3}{4}$.

分析：本题考察立体几何（体积），由于底面与棱垂直，给出了两个直角三角形的信息，结合已知边长，算出各边，再用体积公式计算即可。其中底面三角形可以用海伦公式快速计算.

解：同分析，画出图，知 $PA=\sqrt{3}$、$AC=\sqrt{13}$，那么

$$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot PA=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\left(2+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(2-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\left(-1+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)}=\frac{3}{4}.$$

注：本题虽是立体几何问题（在往年联赛尤其 20、23 年设问较难），但考察得很简单，求结果的方式较为直接；注意可以使用海伦公式加速计算。

5. 一个不均匀的骰子，掷出 1, 2, 3, 4, 5, 6 点的概率依次成等差数列．独立地先后掷该骰子两次，所得的点数分别记为 a,b．若事件“$a+b=7$”发生的概率为 $\dfrac{1}{7}$，则事件“$a=b$”发生的概率为_________.

答案：$\dfrac{4}{21}$.

分析：本题考察概率（非古典概型）计算，题目数据设计比较精妙，可以考虑“设而不求”的思想进行计算.

解：设掷出 k 点的概率为 $P_k\,(k=1,2,\cdots,6)$，那么

$$P_1+P_6=P_2+P_5=P_3+P_4=\frac{1}{3},\ \sum_{k=1}^{6}P_kP_{7-k}=\frac{1}{7}$$

所求即$\sum_{k=1}^{6}P_k^2$，考虑用条件式进行配凑：$\sum_{k=1}^{3}\left(P_k+P_{7-k}\right)^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{6}P_k^2+\sum_{k=1}^{6}P_kP_{7-k}=\frac{1}{3}$，

因此$\sum_{k=1}^{6}P_k^2=\frac{4}{21}$.

注：题目给的条件有“概率依次成等差数列”，如果设出首项计算，则计算量很大。一般是设出中间项，或者不设具体项用等式关系刻画，这都是对付“等差型”计算的小思路，平时要注意积累；另外本题的数据设置精妙，计算时“设而不求”，可以减少很多计算量，防止浪费考试时间去做没有必要的推导。

6. 设$f(x)$是定义域为$\mathbf{R}$、最小正周期为 5 的函数．若函数$g(x)=f(2^x)$在区间$[0, 5)$上的零点个数为 25 ，则$g(x)$在区间$[1, 4)$上的零点个数为_________.

答案：11.

分析：观察条件给出的数据（都是整数），可见两个函数具有一些离散性质，并且$g(x)$完全可用$f(t=2^x)$表达（题目叙述的“包装”），即求$f(t)$在$\left[2,16\right)$上的零点个数，而条件已给了$\left[1,32\right)$上的零点个数，那么结合周期性进行计算不难.

解：同分析，由周期性质，设在一个5-长的周期中$f(x)$有m个零点，在$\left[1,2\right)$上有n个零点，进而知：$0\le n\le m,\ 6m+n=25\Rightarrow m=4,n=1$. 而$\left[2,16\right)=\left[1,16\right)-\left[1,2\right)$，故$f(t)$在$\left[2,16\right)$上的零点个数为$3m-n=11$个.

注：本题中，很多考生要么没弄懂题意，要么把两个题目的区间看错，值得注意。其实抽象型函数问题，往往不需要费劲地考虑函数的构造，只需要根据条件（相当于制定的一套游戏规则）来解决问题，有点类似高考中的新定义问题，做题时应该预设一些“灵活性”。

7. 设F_1,F_2为椭圆Ω的焦点，在Ω上取一点P（异于长轴端点），记O为ΔPF_1F_2的外心，若$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$，则$\Omega$的离心率的最小值为_________.

答案：$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

分析：本题考察向量运算和解析几何中椭圆的性质。条件的核心就是向量数量积的等式，显然只好分别看等式两边，其中$\overrightarrow{PO}$很好表达（基于一个外心的小模型），那么都化到$\left|PF_1\right|,\left|PF_2\right|$计算即可.

解：设$|PF_1|=x,|PF_2|=y$，则$\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}\right)=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$

$2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=2xy\cdot\cos\angle F_1PF_2=x^2+y^2-4c^2$，联立知$4c^2=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2$.

故结合柯西不等式，知$\mathrm{e}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{3x^2/2+y^2/2}{(x+y)^2}}\geq\sqrt{\frac{3}{8}\cdot\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

注：本题中的数量积等式，还可以将两边同时投影到x轴上，简化计算。

8. 若三个正整数a,b,c的位数之和为 8，且组成a,b,c的 8 个数码能排列为 2, 0, 2, 4, 0, 9, 0, 8，则称(a,b,c)为“幸运数组”，例如$(9, 8, 202400)$是一个幸运数组．满足$10<a<b<c$的幸运数组(a,b,c)的个数为_________.

答案：591.

分析：本题考察组合计数，本题似乎可以枚举，但是为减少工作量需要对结构进行简化：题意即将 8 个数排成一排，再按“233”或“224”的方式隔板，其中的 3 个 0 有三个位置不能放。最后注意到a,b,c互异，应排除“224”中$a=b=20$的情况. 如此，列出式子计算即可.

解：采取“先排列，再消序”的方法. 首先有“233”“224”两种隔板方式，每种中三个数的首位有A_5^3种选法，其余数位任意排. 接着再排除$a=b=20$的情形，那么此时a,b的2和0分别有A_2^2和A_3^2种选法，c的0有3个数位可选，剩下4,9,8 全排列. 最后再消序：（1）对数码 0 和 2 消序；（2）注意两种情况都有两个数位数相同，隔板时未将大小区分，因此还需除以 2 消序.

综上，幸运数组的个数$=(2\times\mathrm{A}_5^3\times5!-\mathrm{A}_2^2\times\mathrm{A}_3^2\times3\times3!)\times\frac{1}{2!}\times\frac{1}{3!}\times\frac{1}{2}=591$.

注：组合计数问题在前几年联赛中均有考察，而且往往放在填空题压轴的位置，一般思维难度较大。而今年的本题需要考生对一般计数方法有相当熟练度，否则容易少乘系数导致算错，或者只能花时间枚举。相比去年结合图论和递推计数的第 8 题，本题技术难度减小，但复杂程度增加。

二、解答题：本大题共 3 小题，满分 56 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

9.（本题满分 16 分）在ΔABC中，已知$\cos C=\frac{\sin A+\cos A}{2}=\frac{\sin B+\cos B}{2}$，求$\cos C$的值.

分析：考查解三角形，即三角函数的基本运算. 入手点比较重要，观察发现可以先讨论 A,B，它们加上 $\frac{\pi}{4}$ 后相等或互补，再去探求 $\cos C$ 的信息，思路比较自然.

解：条件即 $\cos C=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$，故 $\left(A+\frac{\pi}{4}\right)+\left(B+\frac{\pi}{4}\right)=\pi$ 或者 $\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\left(B+\frac{\pi}{4}\right)$，前者导致 $C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}$ 使 $\cos C=0$ 而 $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)>0$ 矛盾，因此 $A=B=\frac{\pi}{2}-C$，$\cos C>0\Rightarrow C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，那么

$$\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}=\cos C=\frac{\sin A+\cos A}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$$

这表明 $\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$，平方得 $1-\sin C=\frac{1}{4}$，结合 $C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，知 $\cos C=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

注：注意舍去 $C=\frac{\pi}{2}$ 的情况。三角函数题的核心就是巧用公式化繁为简，本题甚至只有角关系而没有边关系，灵活化角可简化过程。

10. （本题满分 20 分）在平面直角坐标系中，双曲线 $\Gamma: x^2-y^2=1$ 的右顶点为 A. 将圆心在 y 轴上，且与 Γ 的两支各恰有一个公共点的圆称为“好圆”. 两个好圆外切于点 P，圆心距为 d，求 $\frac{d}{|PA|}$ 的所有可能的值.

分析：本题是解析几何大题，具体考察圆与双曲线，思路还是设圆联立，因此本题中的若干“相切”则不必从切点处切线入手刻画，而是考虑联立后方程有唯一的根，最后转到关于两圆圆心信息的一个式子，再带入目标式求可能值.

解：设 $P(0,t)$，两个好圆的方程分别为：

$$x^2+(y-m)^2=(m-t)^2；\quad x^2+(y-n)^2=(n-t)^2.$$

其中不妨设 $m>t>n$，联立 $x^2+(y-m)^2=(m-t)^2$ 与 $x^2-y^2=1$，整理得：

$$2y^2-2my+2mt-t^2+1=0.$$

由于该圆与双曲线均关于 x 轴对称（图形具对称性），故两切点的纵坐标相同，即上述方程仅有一个实根，因此

$$\Delta=4m^2-8(2mt-t^2+1)=0.$$

化简得 $m^2-4mt+2t^2-2=0$，同理 $n^2-4nt+2t^2-2=0$，那么 m,n 是方程 $x^2-4xt+2t^2-2=0$ 的两个不等实根，故

$$\frac{d}{|PA|}=\frac{m-n}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{\frac{(m+n)^2-4mn}{1+t^2}}=\sqrt{\frac{8+8t^2}{1+t^2}}=2\sqrt{2}.$$

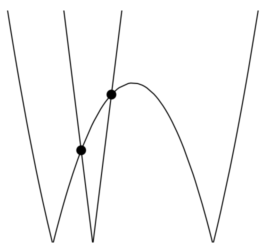
注：本题化简的关键点是利用图形的对称性. 此外，设圆的方式有考究，所设表达式的简洁和有效性，都是平时训练解析几何需要注意的技巧。

11.（本题满分 20 分）设复数 z,w 满足 $z+w=2$，求 $S=|z^2-2w|+|w^2-2z|$ 的最小可能值.

分析：本题考察复数的计算. 乍看目标式不易直接转化处几何意义，可考虑适当变形再计算（相比采用三角不等式放缩会更自然）. 变形时代入或换元的手法不同，会导致计算量有区别：（1）若观察到条件和目标式的对称性，考虑“中值”换元，令 $z=1+u,w=1-u$ 再化简；（2）若直接计算考虑代入 $w=2-z$，全化为 z 计算也可. 采用后者的笨办法，其实也好处理.

解：记 $z=a+bi$，则有

$$S=\left|a^2+2a-4-b^2+2b(a+1)\mathrm{i}\right|+\left|a^2-6a+4-b^2+2b(a-3)\mathrm{i}\right|$$
$$=\sqrt{\left(a^2+2a-4-b^2\right)^2+4b^2(a+1)^2}+\sqrt{\left(a^2-6a+4-b^2\right)^2+4b^2(a-3)^2}$$
$$=\sqrt{\left(a^2+2a-4\right)^2+2b^2\left[(a+1)^2+5+\frac{1}{2}b^2\right]}+\sqrt{\left(a^2-6a-4\right)^2+2b^2\left[(a-3)^2+5+\frac{1}{2}b^2\right]}$$



可见 S 是关于 b 单调递增的函数，故最小值应在 $b=0$ 时取得（即 z 在实轴上），从而

$$S\geq\left|a^2+2a-4\right|+\left|a^2-6a+4\right|=\max\left\{|8a-8|,\left|a^2-4a\right|\right\}.$$

绘出图像可知：当 $8-8a=-a^2+4a$ 即 $a=-1+\sqrt{5}$ 或 $3-\sqrt{5}$ 时，S 取得最小值 $8\sqrt{5}-16$.

注：近年联赛一试真题乃至模拟题中，出现了大量的复数问题，本题则是较为直接的一道，稍加计算则转化为函数问题，还算不上特别“纯”的复数题目。考场上需要稍加悉心计算，如果没有处理绝对值函数的经验，最后一步是不容易得心应手简化为 max 函数的。

2024 年全国中学生数学奥林匹克竞赛（预赛）暨 2024 年全国高中数学联合竞赛 加试（A 卷）试题分析

一．（本题满分 40 分）给定正整数 r．求最大的实数 C，使得存在一个公比为 r 的实数等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$，满足 $\|a_n\|\geq C$ 对所有正整数 n 成立.（$\|x\|$ 表示实数 x 到与它最近整数的距离．）

分析：对于距离函数，可能尚不熟悉，而且注意到公比是整数已离散，所以本题的入手仍是先尝试：先来看 $r=1$ 时，显然考虑数列 $\left\{\frac{1}{2}\right\}$，那么 $C=\frac{1}{2}$ 即为最优。由此可以猜想对一般的 r，最大的 C 是不是都挺接近 $\frac{1}{2}$ 的？换言之，$\frac{1}{2}-\varepsilon$ 似乎是个“不动点”．再看 $r=2$ 的情形，稍加尝试发现比较复杂，不妨先考虑前两项，即 $\|a_1\|\geq C,\|2a_1\|\geq C$，转而考虑 $C\leq\min\{\|x\|,\|2x\|\}$，通过对首先 x 划分区间考察，发现按 $\left[0,\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},1\right)$ 分类时，C 才能取到较大的值，然后考虑 $x=\frac{1}{3}$，检查之后的项 $\|2^n x\|$，发现 $\left\|\frac{2^n}{3}\right\|\geq\frac{1}{3}$ 也是满足的。

接着可以考察 $r=3,4,5$ 的情况，类似可以发现，当 $r=3,5$ 等奇数时，显然 $C=\frac{1}{2}$；偶数较为麻烦，但结合 $r=2$ 的经验，可以首先将区间均分成 $r+1$ 部分，看看 a_1 应该落在哪个部分能使 C 更大.

考虑设 $a_1=\frac{t}{1+r}$，$a_2=\frac{tr}{1+r},a_3=t(r-1)+\frac{t}{1+r},\cdots$，每次希望 a_n 都很靠近 $\frac{1}{2}$，那么让 $t=\frac{r}{2}$ 则是最佳的选择了，进而可以猜出是 $\frac{r}{2r+2}$.

接下来只需证明 $C\leq\frac{r}{2r+2}$，其实只需要证明前两项 $\|a_1\|,\|ra_1\|$ 满足即可．本题难点在于猜出正确的答案，剩下证明还是很容易的.

解：（一）若 r 为奇数，考察 $a_1=\frac{1}{2}$，则对任意正整数 n，$\|a_n\|=\frac{1}{2}$，结合 $\|x\|\leq\frac{1}{2}$，显然此时 $C=\frac{1}{2}$ 为所求最大值.

（二）若r为偶数，设$r=2k$，引理：$\min\{\|a_1\|,\|2ka_1\|\}\le \dfrac{k}{2k+1}$.

引理的证明：只需考虑设$\|a_1\|>\dfrac{k}{2k+1}$，且不妨设$a_1\in(0,1)$，故$\dfrac{k}{2k+1}<a_1<\dfrac{k+1}{2k+1}$.

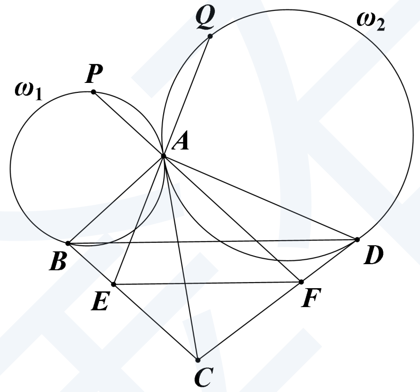
因此$k-\dfrac{k}{2k+1}=\dfrac{2k^2}{2k+1}<2ka_1<\dfrac{2k^2+2k}{2k+1}=k+\dfrac{k}{2k+1}\Rightarrow\|2ka_1\|<\dfrac{k}{2k+1}$，引理证毕.

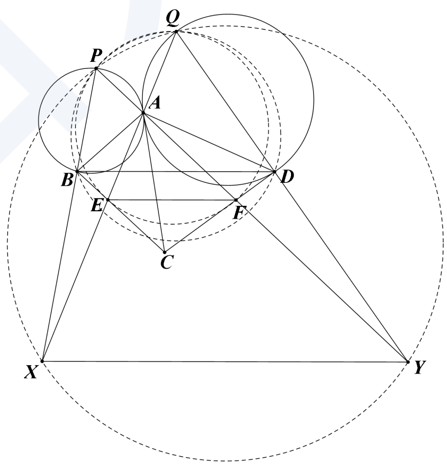
由引理知$C\le\dfrac{k}{2k+1}$，取$a_1=\dfrac{k}{2k+1}$，注意到$k\cdot(2k)^{n-1}\equiv\pm k\ (\mathrm{mod}\ 2k+1)$，因此对任意正整数$n$，都有$\|a_n\|=\dfrac{k}{2k+1}$，故$C=\dfrac{k}{2k+1}=\dfrac{r}{2r+2}$确为最大值.

综上所述，当r为奇数时，$C=\dfrac{1}{2}$；当r为偶数时，$C=\dfrac{r}{2r+2}$.

注：本题的背景与有理逼近（等比数列小数部分的进位制表示）有关，但考场上切忌想复杂. 此题的难度主要集中在猜答案，需要主动构造和尝试，加之题目形式不太常规，导致第一题难度偏高，比较考验考生的作答心态.

二.（本题满分 40 分）如图，在凸四边形$ABCD$中，AC平分$\angle BAD$，点E,F分别在边BC,CD上，满足$EF\parallel BD$. 分别延长FA,EA至点P,Q，使得过点A,B,P的圆ω_1及过点A,D,Q的圆ω_2均与直线AC相切. 证明：B,P,Q,D四点共圆.





分析：本题方法较多，如果从比较自然的倒角考虑，可以观察平行与逆平行：由于$EF\parallel BD$，考虑使用 Reim 定理，要证的共圆即PQ与BD逆平行（以PB,QD为轨道），那么考虑EF在该轨道上（即延长PB,AE交于X，QD,AF交于Y）表示为XY，那么应有P,Q,X,Y共圆，还原回EF即为P,Q,E,F共圆，只需证此即证本题.

解：由于 $\frac{AP}{AQ}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{\sin\angle ABP}{\sin\angle ADQ}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{\sin\angle CAF}{\sin\angle CAE}=\frac{AB}{AD}\cdot\frac{AE}{AB}\bigg/\frac{AD}{AF}=\frac{AE}{AF}$，故 $AP\cdot AF=AE\cdot AQ$，知 E,F,P,Q 四点共圆.

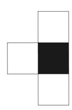
延长 PB,AE 交于 X，QD,AF 交于 Y，由 $\angle BPA=\angle BAC=\angle CAD=\angle AQD$，知 X,Y,P,Q 四点共圆. 所以 $\angle AEF=\angle QPY=\angle QXY$，则 $EF\parallel XY$，进而 $XY\parallel BD$. 这表明 $\angle PBD=\angle PXY=\pi-\angle PQD$，所以 B,P,Q,D 四点共圆.

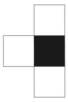
注：本题是一道考查基本功的几何题，与往年同位置的几何题相比较简单，主要考查倒角、共圆、三线共点、根心等相关知识. 具体证明时采用同一法或者引入等角共轭都能行得通. 结合往年几何题来看，本题有反映出联赛弱化几何的趋势，考生应注意对几何基本功的强化.

三．**（本题满分 50 分）**给定正整数 n. 在一个 $3\times n$ 的方格表上，由一些方格构成的集合 S 称为“连通的”，如果对 S 中任意两个不同的小方格 A,B，存在整数 $l\geq 2$ 及 S 中 l 个方格 $A=C_1,C_2,\cdots,C_l=B$，满足 C_i 与 C_{i+1} 有公共边（$i=1,2,\cdots,l-1$）.

求具有下述性质的最大整数 K：若将该方格表的每个小方格任意染为黑色或白色，总存在一个连通的集合 S，使得 S 中的黑格个数与白格个数之差的绝对值不小于 K.

分析：这是一道组合极值问题，需要解决两个部分：证明和构造. 先从构造入手去找 $K_{\max}$，需要构造一个具体的黑白染色方案，希望其中任意一个连通的集合，黑白格个数之差 $|S_b-S_w|$ 都尽可能小. 于是可以考虑方格表问题中最常见的染色方法，黑白间隔染色. 这样黑白格均匀分布，连通的集合中相邻格异色，那么 $|S_b-S_w|$ 的最小上界很容易控制. 接着具体举例来找 $K_{\max}$，如将左上角的格染为黑色（当 n 是奇数时，总体黑格比白格多一个），希望让连通集合中的白格尽量多，黑格尽量少，所以考虑取出所有白格，为了连通还需取出尽量少的黑格，最好的方案则是取出第二行的 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个黑格，此时 $|S_b-S_w|=\left[\frac{3n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]=n$.

所以大致猜测 $K_{\max}=n$，此时取出的格可以分成 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 个  和 $\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]$

个白格，这提示我们在说明构造情形的上界时，可以考虑每一个3×2的长方形（它包含了  结构），能够将$|S_b-S_w|$的上界增加2.

接下来考虑证明的部分，需要证明任意一种染色下总存在连通的集合S，使得$|S_b-S_w|\geq n$. 其实，刚才的具体构造再一次为证明指明了方向，我们还是取出第二行的所有方格（如果白格不少于黑格），以及其余两行的所有白格，这能说明$S_w-S_b\geq n$；而说明$S_b-S_w\geq n$也是完全类似，两个不等式只需一个成立即可，这提示我们考虑抽屉原理.

解：（一）对连通集合S，记S_b、S_w分别为其中黑格、白格的个数，设第二行中有a个黑格，b个白格；其余两行中共有c个黑格，d个白格，则$a+b=n,c+d=2n$.　　令S_1为第二行的所有方格以及其余两行的所有黑格组成的集合，S_2为第二行的所有方格以及其余两行的所有白格组成的集合，那么

$$\left[(S_1)_b-(S_1)_w\right]+\left[(S_2)_w-(S_2)_b\right]=(a+c-b)+(b+d-a)=c+d=2n.$$

由抽屉原理，知$(S_1)_b-(S_1)_w\geq n$与$(S_2)_w-(S_2)_b\geq n$二者必有一者成立，都能说明$K\geq n$.

（二）将方格表黑白染色，使得有公共边的单元格不同色，其中左上角染黑.

下证：对任意一个连通的集合S，都有$|S_b-S_w|\leq n$.　(*)

引理：任取方格表中3×2的长方形R，S在R中的黑白格个数之差的绝对值不大于 2.

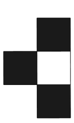
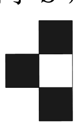
引理的证明：假设S在R中黑格、白格数之差的绝对值大于 2，则S只能选R中全体黑格同时不选白格，或者选R中全体白格同时不选黑格，都会导致S不连通，矛盾，故引理成立.

当$n=1$时，(*)显然成立，下面考虑$n\geq2$的情况.

Case 1. 当n是偶数时，设$n=2k$，则可将$3\times n$的方格表分为k个3×2的长方形，由引理，$|S_b-S_w|\leq2\times k=n$，(*)成立.

Case 2. 当n是奇数时，设$n=2k+1$. 若(*)不成立，同 Case 1，考查方格表右边的$3\times2k$的长方形，则S在其中黑白格个数之差的绝对值不大于$2k$，因此S在方格表左边第一列中，只能选两个黑格，且不能选白格，所以此时黑格数比白格数多$2k+2$个.

为确保连通性，第二列的两个白格必属于S，故左边的3×3正方形中挖去

 之外S选的黑、白格个数相等，而  中只有三个黑格，所以在S左

边的3×3正方形中黑格最多比白格多 3 个，对于右边的$3\times(2k-2)$的长方形，由引理知其中黑白格个数之差的绝对值不大于$2k-2$，所以$\left|S_b-S_w\right|\le 3+2k-2=n$，矛盾，故假设不成立，即(*)成立.

综上所述，结合(*)及$K\ge n$，知$K=n$为可以取到的最大值.

注：组合极值问题似乎是近年联赛组合题的常客了，可能命题组如此设置是出于对改卷工作量的考量：极值问题既需要求具体值，方便赋答案分；又需要一部分组合证明，（即使伪证）得高分更难，考查面也相对较全. 本题相比去年第三题计算量有所下降，部分难点集中在理解题意上. 毕竟本题的叙述形式相对新颖，与往年风格有别，对组合不太熟悉的考生则容易吃亏.

四.（本题满分 50 分）设A,B为正整数，S是一些正整数构成的一个集合，具有下述性质：

(1) 对任意非负整数k，有$A^k\in S$；

(2) 若正整数$n\in S$，则n的每个正约数均属于S；

(3) 若$m,n\in S$，且m,n互素，则$mn\in S$；

(4) 若$n\in S$，则$An+B\in S$.

证明：与B互素的所有正整数均属于S.

分析：本题是一道典型的“无穷集合生成”问题，一般这类问题关键在于考查生成新数的方式和生成新数的特性。四个条件各有深意：条件(2)(3)无关A,B，暗示我们只需分析单个素数幂的情况；条件(1)(4)较为关键，条件(1)暗示去分析素因子和幂次，而条件(4)的$An+B$具有加性，较难分析素因子结构，因此尝试先考虑A,B的互素情况，容易发现只需分析$(A,B)=1$（条件(1)(4)可轻易改写）.

此时在模B意义下，利用条件(1)结合欧拉定理，对指数操作可去掉A的影响，所以需要对条件(4)做一个指数上的升级. 最后还需完成一次遍历，这通过对加性的A^kn+B作迭代可实现.

本题还有另一切入点，从$A=1$开始考察，发现只需对k归纳去证$1+kB\in S$. 每个整数都可以分解为$x\cdot y$，其中x与A互素，y整除A^t，按如此分解结合欧拉定理也很容易归纳.

解：引理：若$n\in S$，且$(A,n)=1$，则$A^kn+B\in S$.

引理的证明：由(1)、(2)知$A^{k-1}\in S$，由(3)知$A^{k-1}n\in S$，再由(3)知$A^kn+B\in S$，引理证毕.

回到原题，先考虑$(A,B)=1$的情况. 此时对任意满足$(p,B)=1$的素数p，要么$p\,|\,A$. 由(1)、(2)知p及其方幂均属于S；要么$(p,AB)=1$，此时由欧拉定理，对任意正整数t，均存在正整数k使得$A^k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p^t)$.

定义数列$\{x_n\}_{n\geq 1}: x_1=1,\ x_{n+1}=A^k x_n+B$. 那么$(A,x_1)=1$，因此对任意$n\geq 2$，$(A,x_n)=(A^k x_{n-1}+B,A)=(B,A)=1$，故由引理知，数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$均属于$S$.

而$x_{n+1}\equiv A^k x_n+B\equiv x_n+B\equiv 1+nB\ \ (\mathrm{mod}\ p^t)$，结合$(p^t,B)=1$，知数列$\{x_n\}_{n\geq 1}$取遍$\mathrm{mod}\ p^t$的完系，故$S$中有$p^t$的倍数，进而$p$及其方幂均属于$S$.

综上，对素数$(p,B)=1$及任意正整数t，均有$p^t\in S$，结合(3)知结论成立.

再看$(A,B)=d>1$的情形，令$A=ad,B=bd$，则$(a,b)=1$，由(1)、(2)知，对任意非负整数k ，有$a^k\in S$；由(2)、(4)知，若$n\in S$，则$An+B=d(an+b)\in S$，那么$an+b\in S$. 进而同上文可知，与b互素的所有正整数均属于S，而这其中包含了全体与B互素的所有正整数，故结论成立.

注：联赛的数论题往往不需要高深的数论知识，所用定理是十分常见且基本的，但是其难点有时就在于去主动构造，本题便是一个很好的例子：方法不唯一，但都需要通过理解条件，研究特例，探赜索隐完成构造.

试题总评：

一试题目相对往年，整体简单（尤其是解答题）。加试四道题目都比较说人话，不转折，也没有特别核心的难点，想法都是中规中矩的，计算量以及需要尝试的部分都不太多。尤其后面三个题，实际分析起来也是比较自然的。

所以今年选拔的是稳健的选手。不需要惊为天人、异想天开的巧思，只要你训练有素，心态平稳，则水到渠成。