

餐馆问题

江涛 苏淳

2025 年上海交通大学强基班数学试题中有一道这样的概率题目:

例 1. 今有 A, B, C, D 四家餐馆, 第一天选餐馆 A , 以后每一天都从前一天未选的三家餐馆中任选一家. 求第 7 天选餐馆 A 的概率.

本题有多种解法, 我们先在这里介绍两种比较基本的解法.

解法 1 (全概率公式): 以 A_n 表示第 n 天选餐馆 A 的事件, 并记 $p_n = P(A_n)$. 根据题意: $p_1 = 1$, 且有

$$P(A_n | A_{n-1}) = 0, \quad P(A_n | \bar{A}_{n-1}) = \frac{1}{3}.$$

于是由全概率公式知

$$p_n = P(A_n) = P(\bar{A}_n)P(A_n | \bar{A}_{n-1}) = (1 - p_{n-1})\frac{1}{3}.$$

亦即

$$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3} \left(p_{n-1} - \frac{1}{4} \right). \quad \textcircled{1}$$

于是, 由 $p_1 = 1$ 和 ①, 知 $\{p_n - \frac{1}{4}\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为公比, 以 $\frac{3}{4}$ 为首项的等比数列, 故知

$$p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^{n-1}, \quad n \geq 2.$$

特别地,

$$p_7 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3} \right)^6 = \frac{61}{243}.$$

解法 2 (穷举法): 根据题意, 不能连续两天选同一家餐馆. 故若我们以 1 表示选餐馆 A , 以 0 表示不选餐馆 A , 那么 7 天中只可能出现如下 5 种情况:

情况① 1 0 0 0 0 0 1

情况② 1 0 1 0 0 0 1

情况③ 1 0 0 1 0 0 1

情况④ 1 0 0 0 1 0 1

情况⑤ 1 0 1 0 1 0 1

根据题意, 在上述各数列中, 由 1 变 0 的概率是 $\frac{1}{3}$, 由 0 变 1 的概率是 $\frac{1}{3}$, 因而 0 接 0 的概率是 $\frac{2}{3}$. 故若以 $\tilde{p}_k$ 表示情况 ⑤ 的发生概率, 则有

$$\begin{aligned}\tilde{p}_1 &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{243}; \\ \tilde{p}_2 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}; \\ \tilde{p}_3 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}; \\ \tilde{p}_4 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}; \\ \tilde{p}_5 &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.\end{aligned}$$

所以, 第 7 天选餐馆 A 的概率 P 是

$$P = \sum_{k=1}^5 \tilde{p}_k = \frac{16}{243} + 3 \cdot \frac{4}{81} + \frac{1}{27} = \frac{61}{243}.$$

下面再介绍一种基于概率转移矩阵的解法.

解法 3 (概率转移矩阵): 我们用 p_{ij} 表示由状态 i 转变为状态 j 的概率. 再用 1 表示选餐馆 A, 以 0 表示不选餐馆 A, 那么根据题意, 有

$$p_{11} = 0, \quad p_{10} = 1, \quad p_{01} = \frac{1}{3}, \quad p_{00} = \frac{2}{3},$$

它们的含义是: $p_{11} = 0$ 表示前一天选餐馆 A, 接下来的一天还选餐馆 A 的概率是 0; $p_{01} = \frac{1}{3}$ 则表示前一天未选餐馆 A, 接下来的一天选餐馆 A 的概率是 $\frac{1}{3}$; 如此等等.

可以把这些转移概率写成一个矩阵:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{10} \\ p_{01} & p_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

矩阵可以做乘法运算. 如果记

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{10} \\ p_{01} & p_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{10} \\ p_{01} & p_{00} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}^{(2)} & p_{10}^{(2)} \\ p_{01}^{(2)} & p_{00}^{(2)} \end{pmatrix}$$

我们来看 P^2 中的各个元素分别代表什么意思. 根据矩阵的乘法法则, 有:

$$\begin{aligned}p_{11}^{(2)} &= p_{11}p_{11} + p_{10}p_{01}, \\ p_{10}^{(2)} &= p_{11}p_{10} + p_{10}p_{00}, \\ p_{01}^{(2)} &= p_{01}p_{11} + p_{00}p_{01}, \\ p_{00}^{(2)} &= p_{01}p_{10} + p_{00}p_{00}.\end{aligned}$$

其中, $p_{11}p_{11} + p_{10}p_{01}$ 表示 “第一步保持状态 1 的概率乘以第二步仍然保持状态 1 的概率” 加上 “第一步由状态 1 变为状态 0 的概率乘以第二步由状态 0 变回状态 1 的概率”, 那么该和数恰好表明 $p_{11}^{(2)}$ 就是 “由状态 1 经过两步变为状态 1 的概率”; 其它三个元素 $p_{10}^{(2)}$, $p_{01}^{(2)}$, $p_{00}^{(2)}$ 的含义亦不言自明.

以此类推, 那么

$$P^6 = \begin{pmatrix} p_{11}^{(6)} & p_{10}^{(6)} \\ p_{01}^{(6)} & p_{00}^{(6)} \end{pmatrix}$$

就是由集合 $\{1, 0\}$ 中的各个状态 6 步后转移到集合 $\{1, 0\}$ 中的各个状态的转移概率所成的矩阵. 其中 $p_{11}^{(6)}$ 就是第一天处于状态 1(选餐馆 A) 经过 6 天变化之后, 第七天仍然处于状态 1(选餐馆 A) 的概率.

下面我们就来计算矩阵 P^6 :

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix},$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{7}{27} & \frac{20}{27} \end{pmatrix},$$

$$P^6 = (P^3)^2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{7}{27} & \frac{20}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{7}{27} & \frac{20}{27} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{61}{243} & \frac{182}{243} \\ \frac{182}{729} & \frac{547}{729} \end{pmatrix}.$$

特别地, 我们得知 $p_{11}^{(6)} = \frac{61}{243}$.

这种解法的好处是思维简单, 列出矩阵后直接去算它的方幂就行了. 适合于电脑运算.