

【复赛冲刺 之 每周一题】

面向对象：(主体)高二学生，以及部分学有余力的高一学生

亲爱的同学你好：

感谢你关注金石为开，为了你更好的提升物理竞赛知识水平，训练解题技巧，自 2020 寒假开始，金石为开每次精品班集训之前将开通周周练栏目，本栏目仅对金石为开线下学员开放，栏目每周内容为专题的原创题目，形式为一题精讲，三题配套训练。

发布时间每周星期六，11 月 30 日即第一周为生物和物理学科，针对集训已报名学员第一周训练，12 月 7 日即第二周为数学已报名学员第一周训练，请同学们相互转告。

第一周 运动学

【前言】

运动现象是人们认识物理世界的开始。从亚里士多德到伽利略、再到牛顿、爱因斯坦，物理学家们根据他们的理解一步步将运动中的物理结构、联系、发展，直到构建出我们今天认知的理论体系。在竞赛物理的体系里也存在同样的延展规律。

本题是物理竞赛里最基本的运动学问题——抛体问题。我们将带领大家从坐标系的角度深度认识这一问题，在数学的角度描述运动、解析运动，并内化该问题的统一解决方法。

关键词：运动学，抛体运动，抛物线，包络线，最远距离，覆盖面。

【题目】

空间中有一无穷大的斜面，倾角为 α ，斜面上有一高度为 h 的细塔，塔的高端有一炮弹发射装置，可以向任意角度以相同的初速度 v_0 发射炮弹，如图(a)所示。已知重力加速度 g 。

(1)建立 oxy 坐标系如(b)图所示。考虑以图示 θ 角度发射的炮弹。暂不考虑与斜面的碰撞，试写出抛物的轨迹方程。

(2) 我们考虑这样的曲面，使得炮弹从塔顶，以相同的 v_0 ，无论向任意方向发射，炮弹都不会超出这个曲面包围的范围。我们称满足这个性质的、最小的曲面为“包络面”。

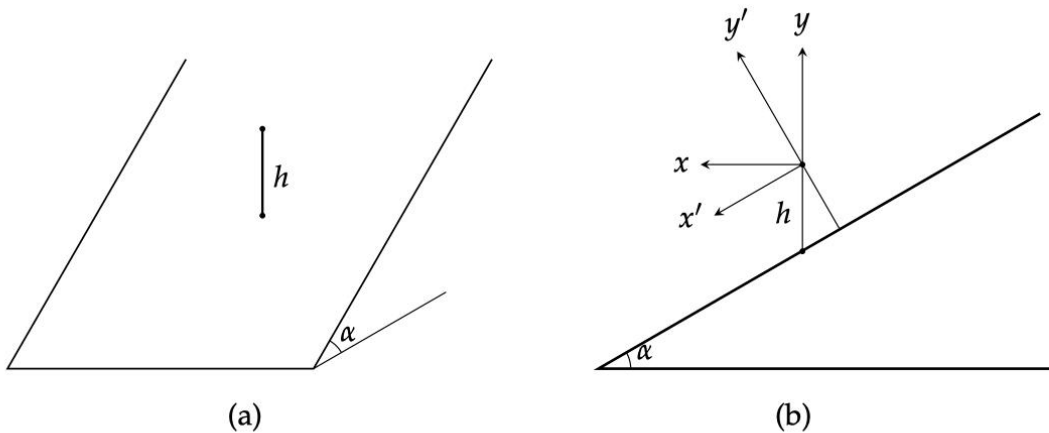
(2.1) 试导出该情况下的包络面方程

(2.2) 为了方便的分析问题，我们引入 $ox'y'z$ 系如图所示。可以看出，这个可由 $oxyz$ 沿着 z 轴逆时针旋转 α 得到。试写出 $oxyz$ 到 $ox'y'z$ 系的变换方程。

(2.3) 为了方便计算，我们约定 v_0 满足： $v_0^2 = gh\cos^2 \alpha$

现请导出原包络面在 $ox'y'z$ 坐标系下的形式。

(2.4) 试利用上述方程，说明炮弹最远能打到的所有位置在斜面上呈什么形状。显然这个最远曲线是闭合的，其面积是多少？并说明在 v_0 满足上述条件的时候， α 取什么值，该面积取得最大值。



【总结】

抛体问题是一切竞赛问题的基础，也是学好物理竞赛绕不开的门梁。它可以很困难，但也可以以很统一、清晰的方法解决。这里一般来说不会涉及太复杂的数学，但往往数学技巧非常的重要，以圆锥曲线、直角坐标、极坐标、导数法求极值为关键词的数学方法必须非常熟练。

本题从坐标的角度带我们认识了抛体问题。

资料下载官网：1、金石为开 www.cgjswk.com;

2、人人堂 mobile.rrtxx.com (2019 年 12 月下旬上线)

第一个重要概念是坐标系。最常见的即是平面直角坐标系。在以原点为发射点，发射仰角 θ ，初速度 v_0 ，y 轴与重力方向相反的坐标系下，抛物的轨迹方程为：

$$y = x \tan \theta - \frac{g(1 + \tan^2 \theta)}{2v_0^2} x^2$$

这个方程可以由 x、y 方向的运动方程联立消去参数时间得到。

如果我们以 $\tan \theta$ 为主元重新整理表达式，可以得到一个二次方程：

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \tan^2 \theta - x \tan \theta + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0$$

考虑打到最远处的极限情况，对于二次问题，极限情况一定是重根，所以如果我们取方程的 $\Delta = 0$ ，就可以得到所有临界情况点构成的集合，临界点的 x、y 满足：

$$\Delta = x^2 - 4 * \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(\frac{gx^2}{2v_0^2} + y \right) = 0$$

整理：

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

这便是包络线方程。很多抛体问题若能直接应用包络线方程，便可直接解决。

同时本题中设计的数学技巧也值得大家关注。为什么转换坐标系可以将问题简化、将方程化为标准形式？从更高层一点的角度来说，这是一个矩阵的优化问题，所有的系数一定可以整理成一个规范型；从简单一点的角度说，我们学习二次曲线/曲面的解析式通常都要求其在“正”的标准形式下，将问题方程回归“正”的形式，才能利于我们找到边界、找到临界点。这是初等数学里最常见的处理手段之一，大家一定要熟练。

运动学中有趣的问题还有很多，比如运动的合成/分解、绳杆约束问题等，这些都起源于工程上的需要，也最终都万变不离其宗——只要掌握好基本的原理，便都可以迎刃而解。如果你对我们的课程感兴趣，欢迎关注金石为开，提出宝贵的需求和意见，我们会尽量满足大家！

金石为开学员请进群反馈意见和获得周周练资料答案及解析！

物理精品班训前专用资料群：920812157(入群请实名)

生涯规划；初高中培优、自主招生、三位一体；高中五大学科竞赛

咨询电话：028-85058381 028-61683900

资料下载官网：1、金石为开 www.cgjswk.com;

2、人人堂 mobile.rrtxx.com (2019 年 12 月下旬上线)

金石为开 2020 年物理竞赛精品班训前原创题目训练规划

【每周一期导学：知识讲解 * 1 + 重难点题 * 1】

时间：从 2019.11.24 到 2020.6.28，共 32 期

2020 暑假再根据之前的反馈出考前综合指导 + 训练

范围：力学、热学、电磁学、光学、近代物理

目标：复赛为基础，决赛有涉及

2020 年寒假安排（单位：周）：【力学】1 ~ 10

- | | | |
|----------|-----------|---------|
| 1 运动学 | 2 静力学 | 3 牛顿定律 |
| 4 天体运动 | 5 动量与能量 | 6 角动量定理 |
| 7 振动和波 | 8 相对论力学 | |
| 9 力学综合 1 | 10 力学综合 2 | |

2020 清明五一安排（单位：周）：【热学】11 ~ 14

- | | |
|---------------------------|--------------|
| 11 分子动理论 | 12 热力学基本定理 1 |
| 13 热力学基本定理 2（结合固液性质、表面张力） | 14 物态变化 |

2020 年暑假安排（单位：周）：【电磁学】15 ~ 24、【光学】25 ~ 28

- | | | |
|-----------|----------------------|-----------|
| 15 静电场 1 | 16 静电场 2（电像理论 介质静电学） | |
| 17 稳恒电流 | 18 磁场 | 19 电磁感应 |
| 20 交流电 | 21 现代电学（结合实验电学 决赛题） | |
| 22 相对论电磁学 | 23 电学综合 1 | 24 电学综合 2 |
| 25 几何光学 1 | 26 几何光学 2 | |
| 27 近代光学 1 | 28 近代光学 2 | |

【近代物理】29 ~ 32

- | |
|----------------------------|
| 29 量子理论基础 1（黑体辐射 + 光电效应） |
| 30 量子理论基础 2（简单核物理 + 测不准关系） |
| 31、32 相对论 1、2 |