从一个掷骰子问题谈起

苏 淳　江 涛

在 2025 年中科大少年班创新班入围考试中有一道这样的概率题:

例 1. 抛掷一枚均匀的六面骰子, 试求在掷出奇数点之前, 所有偶数点都至少出现一次的概率.

在这里, 所有偶数点都至少出现一次, 是一个*遍历性问题*; 而任何奇数点都出现在 “遍历所有偶数之后”, 这又是一个*优先权问题*. 我们先来帮助读者熟悉这两个概念. 先来看一个与优先权有关的抛掷骰子的问题.

例 2. 同时抛掷两枚均匀的骰子. 试求抛出的点数之和是 5 的事件发生在点数之和是 7 的事件之前的概率.

以 A 表示两枚骰子的点数之和是 5 的事件, 以 B 表示两枚骰子的点数之和是 7 的事件. 易知 $P(A)=\frac{4}{36}$, $P(B)=\frac{6}{36}$.

所谓事件 A 发生在事件 B 之前, 那就是说*在事件 A 第一次发生之前, 事件 A 和 B 都没有发生过*. 假如以 D_k 表示事件 A 第一次发生在第 k 次抛掷 (即在前 $k-1$ 次中,A 和 B 都没有发生, 而在第 k 次抛掷时出现 A) 时, 那么就有

$$P(D_k)=\left(1-\frac{4}{36}-\frac{6}{36}\right)^{k-1}\cdot\frac{4}{36}=\left(\frac{13}{18}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{9},\quad k=1,2,\cdots.$$

若以 D 表示事件 A 发生在事件 B 之前, 则 D 就是所有 D_k 的并集, 而诸 D_k 是两两不交的, 所以

$$P(D)=\sum_{k=1}^{\infty}P(D_k)=\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{k-1}=\frac{1}{9}\cdot\frac{18}{5}=\frac{2}{5}.$$

与例 2 和定理 1 有关的内容可见参考文献 [1] 第 68-69 页. 利用例 2 的解法, 我们事实上证得了一个普遍性的结论或者叫做定理.

定理 1. 设 A 与 B 是某一随机试验中的两个不同结果, $AB=\emptyset$, 而 $P(A)=p_a$, $P(B)=p_b$, 则在独立重复地进行这个试验的过程中, 结果 A 在结果 B 之前出现的概率是

$$\frac{p_a}{p_a+p_b}. \qquad ①$$

证明: 事实上, 采用例 2 解答过程中完全相同的符号, 在 $0<p_a+p_b<1$ 时, 我们有

$$P(D_k)=(1-p_a-p_b)^{k-1}\cdot p_a, \quad k=1,2,\cdots.$$

$$P(D)=\sum_{k=1}^{\infty}P(D_k)=p_a\sum_{k=1}^{\infty}(1-p_a-p_b)^{k-1}=\frac{p_a}{p_a+p_b}.$$

而如果 $p_a+p_b=1$, 则表明该随机试验中一共只有 A 和 B 两个不同结果, 那么 A 在 B 之前出现, 就表明试验的结果是 A, 其概率当然就是

$$p_a=\frac{p_a}{1}=\frac{p_a}{p_a+p_b}.$$

由定理 1 我们可以得到一些有趣的结论.

推论 1. 如果某项随机试验中共有 n 种不同结果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 它们的发生概率分别为 $p_1,p_2,\cdots,p_n$, 其中 $0<p_i<1$, $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$. 则在独立重复地进行这个试验的过程中, 结果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 按角标递增的顺序依次出现的概率是

$$p_1\cdot\frac{p_2}{p_2+p_3+\cdots+p_n}\cdot\frac{p_3}{p_3+\cdots+p_n}\cdot\cdots\cdot\frac{p_{n-1}}{p_{n-1}+p_n}. \qquad ②$$

证明: 只需连续使用 ① 式即可. 事实上, A_1 最先出现的概率是 p_1, A_2 在其余所有结果之前出现的概率是 $\frac{p_2}{p_2+p_3+\cdots+p_n}$, 如此等等.

附注 1: 所谓结果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 按角标递增的顺序依次出现绝不意味着它们一个接一个地出现, 而是在结果 A_2 出现之前, A_1 可能出现多次, 但是不可能出现角标大于 2 的结果; 在结果 A_3 出现之前, A_1 和 A_2 可能出现多次, 但是不可能出现角标大于 3 的结果; 如此等等.

推论 2. 如果某项随机试验中共有 n 种不同结果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$, 它们的发生概率彼此相等. 则在独立重复地进行这个试验的过程中, 结果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 按任一指定顺序出现的概率都是 $\frac{1}{n!}$.

证明: 只需在 ② 式中令每个 p_i 都等于 $\frac{1}{n}$ 即可.

我们现在来解答例 1.

解法 1 (利用定理 1 及其推论): 将 "在掷出奇数点之前, 所有偶数点都至少出现一次" 的事件记作 A.

三个偶数先后出现的顺序有 $3! = 6$ 种. 对于其中的任一顺序 a, b, c, 我们面对的情况是: a 在所有数之前出现, 其概率当然是 $\dfrac{1}{6}$; b 在除了 a 之外的所有数之前出现, 其概率是 $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{6}} = \dfrac{1}{5}$; c 在所有奇数之前出现, 其概率是 $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \dfrac{1}{4}$; 奇数的出现顺序任意, 故知

$$P(A) = \frac{3!}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{20}. \qquad ③$$

附注 2: ③ 式表明

$$P(A) = \frac{3! \cdot 3!}{6!}.$$

该式说明, 在所有结果以相等的概率出现的随机试验中, 如果要求其中一部分结果都要在另一部分结果之前的话, 可以用两部分结果的数目的阶乘的乘积比所有结果数目的阶乘来求其概率.

为了帮助读者更加确切地理解 "某些结果在另一些结果之前出现" 这种现象的确切含义, 我们撇开定理 1 及其推论, 再给出一种按照通常思考习惯思维的解法.

解法 2 (传统解法): 将 "在掷出奇数点之前, 所有偶数点都至少出现一次" 的事件记作 A.

在 A 发生时, 首次必须掷出偶数点. 出现首个偶数 a 的概率是 $\frac{1}{2}$. 后面第二个, 第三个偶数 b 与 c 都会陆续出现. 第二个偶数 b 的出现概率是 $\frac{1}{3}$, 而第三个偶数 c 的出现概率是 $\frac{1}{6}$(注意, 此处不要具体区分 a, b, c 究竟谁是谁, 只需明确它们是所有三个互不相同的偶数). 在第一个和第二个偶数 a 与 b 之间可能夹着若干个 a(将这样的 a 的个数记作 i, 则 $i \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, 而这样的 a 的出现概率是 $\frac{1}{6}$); 在第二个和第三个偶数 b 与 c 之间可能夹着若干个 a 或 b(将这样的 a 或 b 的个数记作 j, 则 $j \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, 这样的 a 或 b 的出现概率是 $\frac{1}{3}$); 我们把这样的事件记作 $A_{i,j}$, 于是

$$P(A_{i,j}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^j.$$

这些 $A_{i,j}$ 都是两两不交的, 而我们的事件 A 就是这些 $A_{i,j}$ 的并集. 所以就有

$$P(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(A_{i,j}) = \frac{1}{36} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^i \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{20}.$$

评述: 传统解法虽然麻烦, 但却可以让我们真真切切地看到事件 A 的真实面貌. 对于初学者不失为一种值得认真琢磨的解法.

对于遍历性问题, 我们将另行撰文讨论之.

在 2025 年中科大少年班创新班入围考试卷中, 例 1 只是一个小小的填空题. 可就是这个不起眼的填空题中却包含着概率论中的好几个不同概念, 并且存在着概率计算中的一些坎和坑. 由此看来, 对概率问题的解答一定要十分细心.

参考文献

[1] [美]谢尔登.M. 罗斯 (Sheldon M. Ross) 著: **概率论基础教程**(原书第 10 版), 梁宝生, 童行伟译, 北京: 机械工业出版社, 2022 年 1 月.