从乱序传递观点看受限放球问题

苏 子 杉

本文讨论 2025 年中国科学技术大学科学营的数学最后一题, 我们将从不同于文 [1] 的观点来看待和讨论这个问题.

例 1. 设 $n \geq 2$. 今有 n 个罐子和 n 个球, 球和罐子皆以 1 至 n 编号, 现欲按号码递增顺序依次将球放入罐子. 规则如下: 1 号球不得放入 1 号罐子, 但可随意放入其余各罐. 对于 $k \geq 2$, 只要 k 号罐空着, 就把 k 号球放入 k 号罐, 否则, 就随意放入一个空罐. 如此下去, 显然 n 号球就只有一种放法. 试求 n 号球刚好放在 n 号罐的概率.

以 A 记 n 号球刚好放在 n 号罐的事件.

本题所描绘的放球过程本质上是一种 "乱序传递过程": 原来 n 个球和 n 个罐子本可以一一对应放置的, 因而大家均可对号入座. 然而一开始,1 号球便占据了别的球的位置, 从而引发了一系列的乱序摆放. 不过, 这种乱序放置是有规则的. 只有当 "自己的罐子"(即与球同号的罐子) 被前面的球 (号码较小的球) 占据 (称为 "夺舍") 时, 该球才会向后去夺取其它球的罐子; 并由此造成该罐所对应的球的再向后的夺舍.

这种乱序传递过程不会永无休止地进行下去, 因为放球过程终会结束. 然而只要正在 "夺舍" 的球下一步所落入的罐子的号码 $j \neq n$ 和 1, 那么 j 号球便被 "夺了舍" 而成为下一个要去 "夺舍" 的球, 过程仍将继续. 然而如果正在 "夺舍" 的球下一步落入 1 号罐, 或 n 号罐, 乱序传递过程便将面临结束. 事实上, 当 i 号球 $(2 \leq i \leq n-1)$ 在 "夺舍" 时落入了 1 号罐, 根据放球规则, 所有号码大于 i 的球都将对号入座落进自己的罐子, 从而 n 号球落入 n 号罐, 于是事件 A 发生, 且过程结束; 而若 i 号球 $(2 \leq i \leq n-1)$ 在 " 夺舍" 时落入了 n 号罐, 则 n 号球不能落入 n 号罐了, 事件 A 不发生, 而此时第 $i+1, \cdots, n-1$ 号球都放入自己的罐子, n 号球则放入 1 号罐, 过程亦结束. 这便是我们所要经历的放球过程.

任何一种放球过程都可以用一条路径来描述: 如果 1 号球被放入 i_1 号罐 (那么 2 号至 $i_1 - 1$ 号球都被对号放入自己的罐子, 而 i_1 号球被夺了舍, 从而它需要去夺别的舍); 如果 i_1 号球被放入 i_2 号罐; i_2 号球再被放入 i_3 号罐; 我

们就把这个过程记作 $\ell:\ 1 \to i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots$. 其间凡是未被夺舍的球都依次被对号放入自己的罐子. 路径上所出现的号码都是被夺舍了的球号与它们所对应的罐号.

如果 i 出现在某条路径 ℓ 上, 我们就称路径 ℓ 途经 i 号罐.

由上面的讨论, 我们看到, 传递路径分为两类: 一类路径是由于先有球进入 1 号罐而导致过程终止 (称此类路径终止于 1 号罐), 此类路径形如: $\ell:\ 1 \to i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to 1$, 其中最后一步是某个被夺舍的球落入 1 号罐, 而 $1 < i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$.

另一类路径则是由于先有球进入 n 号罐而导致过程终止 (称此类路径终止于 n 号罐), 此类路径形如: $\ell:\ 1 \to i_1 \to i_2 \to i_3 \to \cdots \to n$, 其中 $1 < i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < n$. 而前一类路径则对应于事件 A 发生; 后一类路径则对应于事件 A 不发生.

定理 1. *对任何 i $(2 \le i \le n-1)$, 途经 i 号罐的任一路径终止于 1 号罐与终止于 n 号罐的概率都是 $\frac{1}{2}$.*

证明: 如果 $i = n-1$, 那么根据放球规则, 第 $2, \cdots, n-1$ 号罐都已经有球放入, 被 "夺舍" 的 $n-1$ 号球只有两个选择: 1 号罐或 n 号罐, 故知结论对途经 $n-1$ 号罐的路径成立. 假设结论已经对所有途经 $i+1, \cdots, n-1$ 号罐 (其中 $2 \le i < n-1$) 的路径成立, 我们要来证明结论对途经 i 号罐的任一路径也成立. 分两种情况: **(1)** 如果该路径下一步直接进入终止状态, 那么它对 1 号罐与 n 号罐的选择概率都是 $\frac{1}{2}$; **(2)** 如果该路径下一步途经某个 j 号罐, 其中 $i < j < n$, 则根据归纳假设, 它在进入 j 号罐, 成为途经 j 号罐的路径后, 它对 1 号罐与 n 号罐的选择概率仍然都是 $\frac{1}{2}$. 于是由全概率公式可知, 结论对这样的路径也成立.

有了上述准备, 我们可以给出例 1 的解答了.

欲事件 A 发生, 1 号球第一步只能落入 $2, \cdots, n-1$ 号罐中的一个, 而传递过程的最后必须终止于 1 号罐.

根据放球规则, 1 号球落入 $2, \cdots, n-1$ 号罐中的一个的概率为 $\frac{n-2}{n-1}$. 而对于任何 $j \in \{2, \cdots, n-1\}$, 途经 j 号罐任一路径终止于 1 号罐的概率都是 $\frac{1}{2}$. 所以

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-2}{n-1} = \frac{n-2}{2(n-1)}.$$

参考文献

[1] 一个受限放球问题, 许康华竞赛优学, 微信公众号, 2025 年 5 月 27 日