# 一个受限放球问题

苏 淳

## 问题与解答

本文所讨论的问题来自 2025 年中国科学技术大学科学营的数学考试题, 该考试的最后一题是:

**例 1.** 设 $n \geq 2$. 今有 $n$ 个罐子和 $n$ 个球, 球和罐子皆以 1 至 $n$ 编号, 现欲按号码递增顺序依次将球放入罐子. 规则如下: 1 号球不得放入 1 号罐子, 但可随意放入其余各罐. 对于 $k \geq 2$, 只要 $k$ 号罐空着, 就把 $k$ 号球放入 $k$ 号罐, 否则, 就随意放入一个空罐. 如此下去, 显然 $n$ 号球就只有一种放法. 试求 $n$ 号球刚好放在 $n$ 号罐的概率.

解答本题前, 需要认真地分析放球过程.

1 号球不得放入 1 号罐, 所以它只有 $n-1$ 种放法. 当把它放在 2 号罐中时, 我们需要安放其余 $n-1$ 个球. 此时 2 号球虽然流离失所, 但是它可以不受限制地随意放入其余 $n-1$ 个罐子中的任意一个. 相应地, 如果一开始把 1 号球放在 $k$ 号罐 $(2 < k < n)$, 那么 $2, \cdots, k-1$ 号球便可各回各家安居乐业, 我们只是需要把其余的 $n-k+1$ 个球放入其余 $n-k+1$ 个罐子. 此时待安排的最小号码的 $k$ 号球虽也流离失所, 但此时它亦是可以不受限制地随意放入其余 $n-k+1$ 个罐子的.

这样一来, 我们就面临一类新的放球入罐问题:

**问题 A.** 设 $n \geq 2$. 有 $n$ 个罐子和 $n$ 个球, 球和罐子皆以 1 至 $n$ 编号, 按号码递增顺序依次将球放入罐子, 1 号球可不受限制地随意放入 $n$ 个罐子中的任意一个; 对于 $k \geq 2$, 只要 $k$ 号罐空着, 就把 $k$ 号球放入 $k$ 号罐, 否则, 就随意放入一个空罐. 如此下去, 显然 $n$ 号球就只有一种放法. 试求 $n$ 号球刚好放在 $n$ 号罐的概率.

我们来解答上述两个问题.

把原题中所求概率记为 $P_n$, 把问题 A 中所求的概率记为 $P'_n$.

由放球规则和我们的分析, 可知

$$P_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n-1} P_k'. \tag{①}$$

① 式得自全概率公式, 因为 1 号球等概率地落入 2 至 $n$ 号罐, 当它落入 $k$ 号罐 $(2 \le k \le n-1)$ 后, 问题转化为 $n-k+1$ 时的问题 A, 而当它落入 $n$ 号罐时, $n$ 号球放在 $n$ 号罐的概率是 0.

我们需要先求出 $\{P_k'\}$. 易见 $P_2' = \frac{1}{2}$, 而由放球规则, 知

$$P_n' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} P_{n-k+1}' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n-1} P_k', \tag{②}$$

其中第一项是 1 号球放在 1 号罐的情形, 此时所有其它球全都各回各家, 一片祥和.

由 ② 可得

$$nP_n' = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} P_k'. \tag{③}$$

因此知有

$$\begin{aligned}
(n+1)P_{n+1}' &= 1 + \sum_{k=2}^{n} P_k' \\
&= 1 + P_n' + \sum_{k=2}^{n-1} P_k' \\
&= 1 + P_n' + (nP_n' - 1) \quad (\text{根据 ③ 式}) \\
&= (n+1)P_n',
\end{aligned}$$

这就告诉我们:

$$P_{n+1}' = P_n' = \cdots = P_2' = \frac{1}{2}$$

代入 ① 式, 即得

$$P_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n-1} P_k' = \frac{n-2}{2(n-1)}. \tag{$*$}$$

这样我们不仅顺利地解决了问题 A, 也给出了例 1 的解答.

## 一些讨论

从我们的答案看出, 对任何 $n \ge 2$, 都有

$$P_n = \frac{n-2}{2(n-1)} < \frac{1}{2} = P_n', \quad \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{2(n-1)} = \frac{1}{2}.$$

这引起我们进一步观察例 1 与问题 A 的兴趣, 它们在具体的放球方式上到底有哪些相同和相异之处? 下面我们用排列来描述放球方式.

在解答本题的过程中, 一般都会先对具体情况进行探索. 探索中自然要涉及对概率的计算, 其中的概率计算大有讲究. 我们来看两个具体情况.

**例 2.** 试具体讨论例 1 中 $n=3$ 时的情形.

易见, 符合例 1 放法规则的排列有 3 种:

$$(2,1,3),\quad (3,1,2),\quad (3,2,1).$$

其中只有排列 $(2,1,3)$ 符合 3 放在 3 号位, 所以有人算出

$$P_3=\frac{1}{3}.$$

我们说这种算法是不对的, 因为在例 1 的放球规则之下, 所出现的排列是受限的, 而各个不同元素受到的限制各不相同, 因此各种不同排列的出现不是等可能的. 计算概率时应当按照数的大小的递增顺序依次考虑它们在各个位置上出现的可能性:

在排列 $(2,1,3)$ 中, 1 不能出现在首位, 所以它只有两个位置可供选择, 因此它出现在 2 号位的概率是 $\frac{1}{2}$; 再看 2, 它也有两个位置可供选择, 所以它出现在 1 号位的概率也是 $\frac{1}{2}$; 此时 3 必然出现在 3 号位. 所以

$$P_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

这显然与 $(*)$ 式相符. 因为按照 $(*)$ 式, 应当有

$$P_3=\frac{3-2}{2\cdot(3-1)}=\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}.$$

**例 3.** 试给出例 1 中 $n=5$ 时的所有满足要求的排列形式, 并逐个计算它们的出现概率.

经过一番寻找, 发现 $n=5$ 时, 满足例 1 所有要求的排列共有如下 7 种:

①$(2,1,3,4,5)$; ②$(3,1,2,4,5)$; ③$(4,1,2,3,5)$; ④$(4,1,3,2,5)$;
⑤$(3,2,1,4,5)$; ⑥$(4,2,1,3,5)$; ⑦$(4,2,3,1,5)$.

其中 1 出现在 2 号位的排列有 4 种 (① 至 ④ 号排列); 1 出现在 3 号位的排列有 2 种 (⑤ 与 ⑥ 号排列);1 出现在 4 号位的排列有 1 种 (⑦ 号排列).

依次考虑各个数在各个位置上的出现可能性, 可以得到

$$
\begin{aligned}
&\text{①号排列的出现概率是 } \widetilde{p}_1=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16};\\
&\text{②号排列的出现概率是 } \widetilde{p}_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{48};\\
&\text{③号排列的出现概率是 } \widetilde{p}_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{96};\\
&\text{④号排列的出现概率是 } \widetilde{p}_4=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{32}.
\end{aligned}
$$

以 ③ 号排列为例, 说明如何计算其出现概率: 1 和 2 均分别有 4 个可选位置, 所以它们分别出现在 2 号位与 3 号位的概率都是 $\frac{1}{4}$; 此时 3 流离失所, 但它有 3 个位置可选, 所以它出现在 4 号位的概率是 $\frac{1}{3}$; 于是 4 又流离失所, 但它有两个位置可选, 所以它出现在 1 号位的概率是 $\frac{1}{2}$, 故知

$$\widetilde{p}_3=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{96}.$$

继续算得

$$
\begin{aligned}
&\text{⑤号排列的出现概率是 } \widetilde{p}_5=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12};\\
&\text{⑥号排列的出现概率是 } \widetilde{p}_6=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24};\\
&\text{⑦号排列的出现概率是 } \widetilde{p}_7=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.
\end{aligned}
$$

其中 $\widetilde{p}_7$ 的计算程序是: 1 出现在 4 号位的概率是 $\frac{1}{4}$, 此时根据放球规则, 2 和 3 各归其位 (均只有 1 种放法); 4 流离失所, 它有两种选择, 所以它出现在 1 号位的概率是 $\frac{1}{2}$, 从而

$$\widetilde{p}_7=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

如此一来, 就有

$$P_5=\sum_{i=1}^{7}\widetilde{p}_7=\frac{1}{96}(6+2+1+3+8+4+12)=\frac{36}{96}=\frac{3}{8}.$$

另一方面, 根据 $(*)$ 式, 也有

$$P_5=\frac{5-2}{2\cdot(5-1)}=\frac{3}{8}.$$

两种途径计算结果相同.

**例 4.** 试给出 $n=5$ 时的符合问题 A 要求的所有排列形式, 并具体算出 $P_5'=\frac{1}{2}$.

不难看出, 凡是符合例 1 要求的排列都符合问题 A 的要求, 此外还应包括 1 出现在 1 号位的排列. 而此种排列只有一个, 它就是:

$$(1, 2, 3, 4, 5).$$

这是因为只要 1 出现在 1 号位, 那么其余各数就都是各回各家, 因此就只有一种放法. 这个排列的出现概率当然就是 $\frac{1}{5}$, 因为 1 出现在任一位置上的概率都是 $\frac{1}{5}$. 而其余 7 种符合例 1 要求的排列在作为符合问题 A 要求的排列时, 除了其中的 1 在各允许位置的概率由 $\frac{1}{4}$ 变为 $\frac{1}{5}$ 之外, 其余均无变化, 由此即知

$$P_5' = \frac{1}{5} + \frac{4}{5}P_5 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}.$$

我们就暂且到此为止. 具体探讨例 1 和问题 A 中的各种放球相当有趣, 其中可以派生出许多有意思的题目, 大家若有闲暇, 不妨一试.