通过条件期望计算期望

苏 淳　　江 涛

数学期望是随机变量的最重要的特征数字之一, 也是概率论中最重要的考核内容之一. 如何计算数学期望无疑是一个重要问题, 我们曾经在文 [1] 中介绍过三种方法, 其中通过分布求期望当然是最基本的方法. 但是这种基本方法未必都很方便, 例如对几何分布的期望计算.

例 1. (几何分布的期望) 设随机变量 X 的分布律是

$$P(X=n)=pq^{n-1}, \quad n\in \mathbf{N}_+,$$

其中 $0<p<1,\ q=1-p$. 试求 EX.

在这里, X 服从的就是参数为 p 的几何分布. 根据 EX 的定义, 由 X 的分布可得

$$EX=\sum_{n=1}^{\infty} nP(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1}=p\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}. \tag{①}$$

这是一个无穷级数的求和问题. 如果直接计算, 需要用到一些分析数学的技巧或者微积分学知识.

概率论自然有概率方法来对付这类问题. 方法之一就是利用条件期望来计算期望.

就像全概率公式那样, 我们也有全期望公式. 如果我们有一个完备事件组 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, 也就是

$$A_i\cap A_j=\varnothing, \quad i\neq j, \qquad \bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega;$$

并且我们可以计算出在各个 A_i 发生的情况下 X 的条件期望 $E(X|A_i)$, 那么就有

$$EX=\sum_{i=1}^{n} E(X|A_i)P(A_i). \tag{$*$}$$

这里的关键是如何合理地选择完备事件组. 作为例子, 我们来求几何分布的期望.

令 $A=(X=1)$, 于是 $\overline{A}=(X>1)$. 从而 $\{A,\overline{A}\}$ 就是一个完备事件组. 易知 $P(A)=P(X=1)=p$, $P(\overline{A})=P(X>1)=1-p=q$. 我们来看条件期望 $E(X|A)$ 和 $E(X|\overline{A})$.

$E(X|A)=E(X|X=1)$ 就是在 $X=1$ 时对 X 求均值, 那么当然就有 $E(X|A)=1$. 至于 $E(X|\overline{A})=E(X|X>1)$, 我们先来给出一种正规的推导

$$
\begin{aligned}
&E(X|X>1)=\frac{1}{P(X>1)}\sum_{n=2}^{\infty}nP(X=n)=\frac{p}{q}\sum_{n=2}^{\infty}nq^{n-1}\\
&=p\sum_{n=0}^{\infty}q^k+\frac{p}{q}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)q^{n-1}\\
&=1+\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=1+EX.
\end{aligned}
$$

于是, 由全期望公式立得

$$EX=P(A)E(X|A)+P(\overline{A})E(X|\overline{A})=p+q(1+EX)=1+qEX,$$

故知 $pEX=1$, 亦即

$$EX=\frac{1}{p}.$$

其实, 对 $E(X|\overline{A})=1+EX$ 的推导可以不必那么麻烦. 我们知道几何分布是一种等待胜利的分布, 好比连续射击, 各次射击相互独立, 每次命中靶心的概率都是 p $(0<p<1)$. 以 X 记第一次命中靶心时所射击过的次数. 那么 X 就服从参数为 p 的几何分布. 在这里, 命中靶心就是我们所等待的胜利, X 就是等待的次数.

如果以 A 记首枪即命中的事件, 那么显然就有 $E(X|A)=E(X|X=1)=1$. 而若 A 不发生, 那就意味着第一枪白打, 后面该如何等待还得如何等待, 所以 $E(X|\overline{A})=1+EX$. 这就方便地得到了 X 在 $\overline{A}$ 之上的条件期望. 再看一个例子.

例 2. 连续抛掷一枚均匀的骰子, 直到接连抛出两次 1 点为止. 以 X 记所需的抛掷次数, 求 EX.

如果以 B_1 表示第一次抛掷时就抛出的是 1 点, 那么显然有

$$E(X|\overline{B_1})=1+EX,$$

这是因为第一次白抛, 后面该抛多少次还得抛多少次. 而 $E(X|B_1)$ 则不是那么显而易见. 于是我们再以 B_2 表示第二次抛掷时抛出的是 1 点, 那么就有

$$E(X|B_1B_2)=2, \qquad E(X|B_1\overline{B_2})=2+EX,$$

其中第一个等式是显然的, 因为开头的两次抛掷就已经连续抛出了两个 1 点了, 这时的 X 当然就是 2; 至于第二个等式也是显然的, 因为在事件 $B_1\overline{B_2}$ 中, 前两次抛掷是白抛.

注意到 $A_1=B_1B_2,\ A_2=B_1\overline{B_2},\ A_3=\overline{B_1}$ 是一个完备事件组, 所以我们有

$$EX=P(B_1B_2)E(X|B_1B_2)+P(B_1\overline{B_2})E(X|B_1\overline{B_2})+P(\overline{B_1})E(X|\overline{B_1}).$$

亦即

$$EX=\frac{2}{36}+\frac{5(2+EX)}{36}+\frac{5(1+EX)}{6}.$$

由此解得

$$EX=42.$$

参考文献

[1] 苏淳: 数学期望的呓语, 许康华竞赛优学, 微信公众号, 2024-10-02