# 小议一道概率试题

苏 淳　江 涛

偶尔翻阅某市 2026 届高三入学适应性考试数学试卷, 其中有一道概率试题引起我们的讨论兴趣:

**17.** (15 分)

某学校举行知识竞赛, 第一轮选拔共设有 $A, B, C, D$ 四个问题, 竞赛规则如下:

① 每位参赛者记分器的初始分均为 10 分, 答对问题 $A, B, C, D$ 分别加 1 分, 2 分, 3 分, 6 分, 答错任一题减 2 分;

② 每回答一题, 记分器都显示累计分数. 当累计分数小于 8 分时, 答题结束, 淘汰出局; 当累计分数大于或等于 14 分时, 答题结束, 进入下一轮; 当答完四题, 累计分数仍不足 14 分时, 答题结束, 淘汰出局; 当累计分数大于或等于 14 分时, 答题结束, 进入下一轮.

③ 每位参赛者按问题 $A, B, C, D$ 顺序作答, 直至答题结束. 假设甲同学对问题 $A, B, C, D$ 回答正确的概率依次为 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 且各题之间回答正确与否之间没有影响.

**(1)** 求甲同学能进入下一轮的概率;

**(2)** 若 $\xi$ 记甲同学本轮答题结束时答题的个数, 求 $\xi$ 的分布列和数学期望 $E\xi$.

## 一点感想

本题所讨论正是概率论可以发挥作用的问题, 它的情景设置尤其使人感觉兴趣, 四道题答对时的加分不同, 尤其是问题 $D$ 显得非常抢眼, 给它所加给的分数竟然是前三题的总和. 然而答错时所扣去的分数却都是 2 分. 这不免使人感觉这应该是一道斗智斗谋, 显示考生概率知识水平, 体现灵活运用概率知识解题能力的题目, 因而应该让参赛者在答题顺序上有自由选择的权利, 以谋求获得较高的通过率和减少答题数目作为考核目标.

然而往下继续读题时, 却让人大为扫兴, 题中竟然规定参赛者只能 “按问题 $A, B, C, D$ 顺序作答”. 正是这条规定, 使得题目顿然失色, 不仅失去了

所有灵气, 而且变为一道刻板老套的数字题. 解题人只能繁琐地列举出事件 $Q$ 中的所有情形, 并因此面对一个长长的算式, 不再具有任何启发性, 显得非常呆板而无趣.

设想一下, 如果我们放开题中的限制条件, 允许参赛者自由选择答题顺序, 并且在能够断定拿不够 14 分的情况下, 就结束答题, 淘汰出局. 那么我们将会有什么样的结局吧!

## 一种方案

一个容易理解的选择就是先答问题 $D$. 因为只要答对了它, 就立即拿到 16 分, 一举过关; 如果没答对, 也还有弥补机会, 只要其余三题都答对, 也能拿到 14 分, 依然可以过关. 而若除了问题 $D$ 没答对之外, 其余三题中只要再答错一题, 都会被淘汰出局, 用不着再一个个地去数结果, 答案相当干脆利落.

首先可以立即算出, 在先答问题 $D$ 的情况下, 甲同学能进入下一轮的概率是

$$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{11}{32}. \qquad ①$$

其次, 为尽量减少甲同学在本轮所需回答的问题数目 $\xi$, 需要在他未能正确回答问题 $D$ 的情况下, 合理安排 $A, B, C$ 三题的回答顺序. 如果三题都能答对, 自然不存在顺序安排上的区别; 关键就是在他未必能全都答对的情况下, 如何减少答题数目. 显然, 越早暴露缺陷越好, 意即越没把握答对的题目越先回答, 从而我们认为合理的答题顺序是 $C, B, A$, 于是有:

**(1)** 如果甲能够通过本轮测试, 进入下一轮, 则或者只需回答一个问题, 即 $\xi=1$, 其概率是 $\frac{1}{4}$; 或者需回答所有 4 个问题, 即 $\xi=4$ (答错 $D$, 答对 $C, B, A$), 其概率是 $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{32}$.

**(2)** 如果甲未能通过本轮测试的情况下, 出于尽量少答题的目的, 按照 $C, B, A$ 的顺序答题. 如果在答错 $D$ 之后, 又未答对 $C$, 则记分牌上只有 6 分了, 已可判明他必须出局, 此时 $\xi=2$, 其概率是 $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$. 在 $C$ 答对的情况下, 继续答 $B$. 如果 $B$ 未答对, 可判明他必须出局, 此时 $\xi=3$, 其概率是 $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$. 如果 $B$ 答对了, 继续回答 $A$, 由于他未过关, 表明他未能答对 $A$, 此时也是回答了 4 个问题, 概率是 $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$.

综合上述, 可知 $P(\xi=4)=\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{8}$, 且 $\xi$ 的分布律为

| $\xi$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

$$E\xi=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+\frac{1}{8}\cdot 4=\frac{17}{8}. \qquad ②$$

在我们所建议的答题顺序下, 不仅把甲能通过第一轮比赛的概率由原题答案中的 $\frac{1}{4}$ 提高到 $\frac{11}{32}$; 而且把所需回答的问题数目的平均值由原题中的 $\frac{27}{8}$ 减少为 $\frac{17}{8}$.

## 一点评述

我们关于答题顺序的建议看起来相当突兀, 完全不合通常的想法, 更不符合我们日常给学生说的建议. 一般来说, 通常我们总是建议学生考试时先把题目通览一遍, 再捡有把握的题目先做, 越拿手的题目越先做. 这种做法的好处是明显的, 一是把能够拿到的分数尽量先拿到手, 二是可以提振信心, 三是为后面攻克难题留出时间. 而我们现在反倒是越难越建议先碰. 其实这并不奇怪, 因为考试规则不同. 日常的考试不存在中途出局的问题, 唯一的奋斗目标就是尽量多拿分数. 现在则是既有正分又有负分还要注意在拿到足够分数之前不要被淘汰, 在注定要被淘汰的情况下, 尽量减少答题数目. 所以现在是多目标行动, 行动方案自然不同于日常考试.

## 一个建议

由于在允许参赛者自由选择答题顺序后, 存在着一个 “最佳性” 问题, 究竟哪种顺序最佳, 是需要给出证明的. 与其在这个问题上留下争议, 不如把题目出成开放性的:

*试对某甲答题顺序提出一种建议方案, 并针对你的这个建议方案解答题目中的两个问题.*

*我们将根据对两个问题的答案评给成绩. 甲同学能进入下一轮的概率越大的方案成绩越高; $E\xi$ 越小的方案成绩越高.*

以上是我们的一些不成熟的看法, 欢迎大家评述.