物理竞赛中的数学知识

物理学研究的是物质的运动规律，经常需要建立数学模型进行分析，在这里先简单地介绍一下物理竞赛中最常用到的一些数学知识。

一、重要函数

1．指数函数　　2．三角函数　　3．反三角函数

二、数列、极限

1．**等差数列**：通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，前 n 项和 $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

等比数列：通项公式 $a_n=a_1q^{(n-1)}$，前 n 项和 $S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1)$

2．**数列的极限**：

设数列 $\{a_n\}$，当项数 n 无限增大时，若通项 a_n 无限接近某个常数 A，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，或称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$．否则称数列 $\{a_n\}$ 发散或 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

三、函数的极限

设 $f(x)$ 在 $x>a(a>0)$ 有定义，对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $X>0$，当 $x>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数 A 是函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的极限。记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$。

运算法则：

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$.

四、无穷小量与无穷大量

1．若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量（若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷大量）或：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$，则称 $\alpha(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小。在自变量某变化过程中，$|f(x)|$ 无限增大，则称 $f(x)$ 在自变量该变化过程中为无穷大。记为 $\lim f(x)=\infty$.

2．无穷小量与无穷大量的关系

无穷小量的倒数是无穷大量；无穷大量的倒数是无穷小量。

3．无穷小量的运算性质

（i）有限个无穷小量的代数和仍为无穷小量。

（ii）无穷小量乘有界变量仍为无穷小量。

（iii）有限个无穷小量的乘积仍为无穷小量。

4．无穷小的比较

定义：设 $\lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\beta(x)=0$，

1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶无穷小。

2) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称当 $x\to x_0$ 时 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶无穷小。

3) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C(C\neq 0)$，则称当 $x\to x_0$ 时 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小，

4) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则称当 $x\to x_0$ 时 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小。

5. 重要公式

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$　（2）$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$　（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}(a>o)=1$

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$　（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$　（6）$\lim\limits_{x\to-\infty}arc\tan x=-\dfrac{\pi}{2}$

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arc}\cot x=0$　（8）$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arc}\cot x=\pi$　（9）$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

（10）$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\infty$　（11）$\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=1$

6. 下列常用等价无穷小关系（$x\to 0$）

$\sin x\sim x$　$\tan x\sim x$　$\arcsin x\sim x$　$\arctan x\sim x$　$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$

$\ln(1+x)\sim x$　$e^x-1\sim x$　$a^x-1\sim x\ln a$　$(1+x)^{\partial}-1\sim\partial x$

五、二项式定理

1．二项式定理

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^nb^n$$

六、常用三角函数公式

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$　　$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$　　$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\sin 2A=2\sin A\cos A$　　$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$　　$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$　　$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\dfrac{\sin A}{1+\cos A}$

和差化积公式

$\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$　　$\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$

$\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cdot\cos\dfrac{a-b}{2}$　　$\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\cdot\sin\dfrac{a-b}{2}$

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a\cdot\cos b}$$

积化和差公式

$\sin a\sin b=-\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]$　　$\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$

$\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$　　$\cos a\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]$

万能公式

$\sin a=\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$　　$\cos a=\dfrac{1-\tan^2\frac{a}{2}}{1+\tan^2\frac{a}{2}}$　　$\tan a=\dfrac{2\tan\frac{a}{2}}{1-\tan^2\frac{a}{2}}$

导函数与微分

一、导数的概念

1．导数定义

设 $y=f(x)$在 x_0的某邻域内有定义，在该邻域内给自变量一个改变量 Δx，函数值有一相应改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$在 x_0点的导数，此时称 $y=f(x)$在 x_0点可导，用 $f'(x_0)$表示.

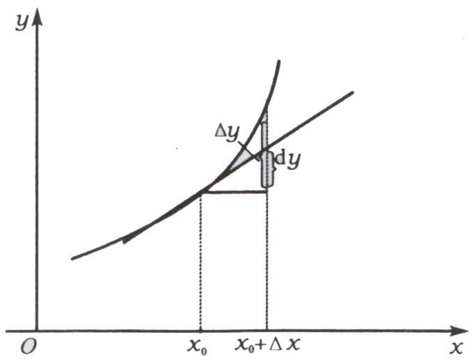

图 2-1

2．导数的几何意义：曲线上该点切线的斜率

（1）几个基本初等函数的导数

①$(c)'=0$　②$x^{\mu}=\mu x^{\mu-1}$　③$(\sin x)'=\cos x$　④$(\cos x)'=-\sin x$

（2）导数的四则运算

①$[c\cdot u(x)]'=c\cdot u'(x)$；

②$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)+v'(x)$；

③$[u(x)\cdot v(x)]=u'(x)\cdot v'(x)+u(x)\cdot v'(x)$；

④$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

二、微分

1．微分的概念

设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若在其中给 x_0 一改变量 Δx，相应的函数值的改变

量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + 0(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0).$$

其中 A 与 Δx 无关,则称 $f(x)$ 在 x_0 点可微,且称 $A\Delta x$ 为 $f(x)$ 在 x_0 点的微分,记为

$$dy\Big|_{x=x_0} = df\Big|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

$y=f(x)$ 在 x_0 可微的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 可导，且 $dy\Big|_{x=x_0} = f'(x_0\Delta x)$. 当 $f(x)=x$ 时,可得 $dx=\Delta x$, 因此 $dy=f'(x)dx$.

由此可以看出,微分的计算完全可以借助导数的计算来完成.

2．微分运算法则

设 $u(x), v(x)$ 可微,则

$$d(cu(x)) = cdu(x), \qquad d(c)=0.$$
$$d[u(x)\pm v(x)] = du(x)\pm du(x).$$
$$d[u(x)\cdot v(x)] = u(x)dv(x)+v(x)du(x).$$
$$d\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$$

三、不定积分

1．不定积分概念

【定义】(原函数)　若对区间 I 上的每一点 x, 都有

$$F'(x) = f(x) \text{或} dF(x) = f(x)dx,$$

【定义】(不定积分)　函数 $f(x)$ 的原函数的全体称为 $f(x)$ 的不定积分,记作 $\int f(x)dx$. 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int f(x)dx = F(x)+C \qquad (C\text{是任意常数})$$

2．不定积分的性质

（1）积分运算与微分运算互为逆运算.

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x) \text{或} d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$$
$$\int F'(x)dx = F(x)+C \text{或} \int dF(x) = F(x)+C.$$

（2） $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (常数k \neq 0)$

（3） $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$

3．基本积分公式

$\int kdx = kx + c \qquad \int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c$

$\int \cos xdx = \sin x + c \qquad \int \sin xdx = -\cos x + c$

四、定积分

【定义】(定积分)函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的定积分定义为 $I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

【定理】(牛顿-莱布尼茨公式) 若函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 在$[a, b]$上的一个原函数，则 $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

上述公式也称为微积分基本定理,是计算定积分的基本公式.

五、导数的四则运算法则

$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

六、基本导数公式

(1) $(c)' = 0$ (2) $x^{\mu} = \mu x^{\mu-1}$ (3) $(\sin x)' = \cos x$

(4) $(\cos x)' = -\sin x$ (5) $(\tan x)' = \sec^2 x$ (6) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(7) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$ (8) $(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$ (9) $(e^x)' = e^x$

(10) $(a^x)' = a^x \ln a$ (11) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (12) $(\log_a{}^x)' = \frac{1}{x\ln a}$

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

(16) $\left(\operatorname{arc}\cot x\right)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$　(17) $\left(x\right)'=1$　(18) $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

七、微分公式与微分运算法则

(1) $d\left(c\right)=0$　(2) $d\left(x^{\mu}\right)=\mu x^{\mu-1}dx$　(3) $d\left(\sin x\right)=\cos xdx$

(4) $d\left(\cos x\right)=-\sin xdx$　(5) $d\left(\tan x\right)=\sec^2 xdx$　(6) $d\left(\cot x\right)=-\csc^2 xdx$

(7) $d\left(\sec x\right)=\sec x\cdot\tan xdx$　(8) $d\left(\csc x\right)=-\csc x\cdot\cot xdx$　(9) $d\left(e^x\right)=e^x dx$

(10) $d\left(a^x\right)=a^x\ln adx$　(11) $d\left(\ln x\right)=\dfrac{1}{x}dx$　(12) $d\left(\log_a{}^x\right)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$

(13) $d\left(\arcsin x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(14) $d\left(\arccos x\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　(15) $d\left(\arctan x\right)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$

(16) $d\left(\operatorname{arc}\cot x\right)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$

八、微分运算法则

(1) $d\left(u\pm v\right)=du\pm dv$　(2) $d\left(cu\right)=cdu$

(3) $d\left(uv\right)=vdu+udv$　(4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$

九、基本积分公式

(1) $\int kdx=kx+c$　(2) $\int x^{\mu}dx=\dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1}+c$　(3) $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+c$

(4) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+c$　(5) $\int e^x dx=e^x+c$　(6) $\int\cos xdx=\sin x+c$

(7) $\int\sin xdx=-\cos x+c$　(8) $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 xdx=\tan x+c$

(9) $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}=\int\csc^2 xdx=-\cot x+c$　(10) $\int\dfrac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

(11) $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c$

十、向量

既有大小又有方向的量

表示：$\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$ （几何表示）向量的大小称为向量的模，记作 $|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$

1. 方向余弦：$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\dfrac{x}{|\boldsymbol{r}|},\dfrac{y}{|\boldsymbol{r}|},\dfrac{z}{|\boldsymbol{r}|}\right)$ $\boldsymbol{r}$=（x，y，z），$|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2. 单位向量 $\vec{a}^{\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 模为 1 的向量。

3. 模 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

4. 向量加法（减法）$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2,y_1\pm y_2,z_1\pm z_2)$

5. $\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\bullet|\boldsymbol{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=0$（$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\bullet\boldsymbol{a}$）

6. 叉积、外积

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$$

7. 数乘：$k\vec{a}=\overrightarrow{ka}=(kx,ky,kz)$

例 1 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，求 $|\vec{a}+\vec{b}|$。

解：$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2}$

$$=\sqrt{2^2+2\cdot2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}+1}=\sqrt{7}$$

例 2 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，求 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$。

解：根据向量的运算法则

$$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})$$

$$=[(a+b)\times b+(a+b)\times c]\cdot(c+a)$$

$=[(a+b)\times b]\cdot(c+a)+[(a+b)\times c]\cdot(c+a)$

$=(a\times b)\cdot(c+a)+[(a+b)\times c]\cdot a$

$=(a\times b)\cdot c+(a\times c)\cdot a+(b\times c)\cdot a$

$=(a\times b)\cdot c+(a\times b)\cdot c$

$=2(a\times b)\cdot c=4$

8.向量的投影

$\mathrm{Prj}_a\,b=|b|\cos\theta$ 为向量 b 在向量 a 上的投影。$a\cdot b=|a|\,\mathrm{Prj}_a\,b$

十一、复数的运算

1．复数的表示法

复数 $\widetilde{A}$ 是一个二维数，它对应于复平面中的一个坐标为 (x,y) 的点，或对应于复平面中的一个长度为 A、仰角为?的矢量(见图 C－1)．与此相应地复数有下列两种表示法：

$\begin{cases}\widetilde{A}=x+yi, & (C.\ 1)\\ \widetilde{A}=Ae^{i\varphi}, & (C.\ 2)\end{cases}$，式中 $i=\sqrt{-1}$，$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$（欧拉公式）；

(C．1)式是复数的直角坐标表示，对应点的横坐标 x 为复数的实部，

记作：$x=\mathrm{Re}\,\widetilde{A}$，纵坐标 y 为复数的虚部，记作：$y=\mathrm{Im}\,\widetilde{A}$．

(C．2)式是复数的极坐标表示，对应矢量的长度 A 为复数的模或绝对值，

记作：$A=|\widetilde{A}|$，仰角 φ 为复数的辐角，记作：$\varphi=\arg\widetilde{A}$．

两种表示之间有如下换算关系：$\begin{cases}A=\sqrt{x^2+y^2}, & (C.\ 3)\\ \varphi=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}, & (C.\ 4)\end{cases}$；或反过来，有 $\begin{cases}x=A\cos\varphi, & (C.\ 5)\\ y=A\sin\varphi, & (C.\ 6)\end{cases}$．

单位虚数 $i=\sqrt{-1}$ 有如下性质：$i^2=-1$，$\dfrac{1}{i}=-i$，$i=e^{i\frac{\pi}{2}}$，$\dfrac{1}{i}=e^{-i\frac{\pi}{2}}$．

复数 $\widetilde{A}=x+yi=e^{i\varphi}$ 的共轭复数定义为 $\overline{A}=x-yi=e^{-i\varphi}$，（C．7）

所以 $\widetilde{A}\overline{A}=A^2=x^2+y^2$，（C．8)；即一对共轭复数的乘积等于模的平方．

两个复数 $\widetilde{A}_1=x_1+y_1i=A_1e^{i\varphi_1}$、$\widetilde{A}_2=x_2+y_2i=A_2e^{i\varphi_2}$ 相等的原理为：实部相等且虚部相

等即 $x_1 = x_2$ 且 $y_1 = y_2$；

或者为：模相等且辐角相等即 $A_1 = A_2$ 且 $\varphi_1 = \varphi_2$．

2．复数的四则运算

（1）加减法：$\widetilde{A_1} \pm \widetilde{A_2} = (x_1 + y_1 i) \pm (x_2 + y_2 i) = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$，（C．9）；即实部、虚部分别加减．

（2）乘法：$\widetilde{A_1} \cdot \widetilde{A_2} = (A_1 e^{i\varphi_1}) \cdot (A_2 e^{i\varphi_2}) = A_1 A_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$，（C．10）；即模相乘，辐角相加．

或者 $\widetilde{A_1} \cdot \widetilde{A_2} = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_1 + x_2 y_1) i$，（C．11）．

（3）除法：$\dfrac{\widetilde{A_1}}{\widetilde{A_2}} = \dfrac{A_1 e^{i\varphi_1}}{A_2 e^{i\varphi_2}} = \dfrac{A_1}{A_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$，（C．12）；即模相除，辐角相减．

或者 $\dfrac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \dfrac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \dfrac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \dfrac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$，（C．13）；

倒数运算可以看作是除法的特例：$\dfrac{1}{\widetilde{A}} = \dfrac{1}{A e^{i\varphi}} = \dfrac{1}{A} e^{-i\varphi}$，（C．14）；

或者 $\dfrac{1}{\widetilde{A}} = \dfrac{1}{x + yi} = \dfrac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} - \dfrac{y}{x^2 + y^2} i$，（C．15）．

3．欧拉公式

现在介绍一下欧拉公式是如何得来的．从参考书中可以查到 e^x、$\cos x$、$\sin x$ 的幂级数展开式：

$$\begin{cases} e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots \\ \cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots \end{cases}$$

；在 e^x 的展开式中把 x 换成 $\pm ix$，注意到 $(\pm i)^2 = -1$，$(\pm i)^3 = \mp i$，

$(\pm i)^4 = 1$，…，

即可得到：$e^{\pm ix} = 1 \pm i \dfrac{x^2}{1!} \mp \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots = (1 - \dfrac{x^2}{2!} + \cdots) \pm i(x - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots)$，即 $e^{\pm ix} = \cos x + i \sin x$，

(C. 16).
这就是欧拉公式．下面给出几个常用的三角函数与复指数函数之间的变换公式．

从欧拉公式可以反解出：$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})$，(C. 17)；$\sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})$，(C. 18)

由此立即得到：$\tan\varphi=-i\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}$，(C. 19)

4．简谐振动的复数表示

简谐振动：$S(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，也可用一个复数 $\widetilde{S}(t)=Ae^{i(\omega t+\varphi_0)}$ 的实部或虚部来表示．

上式右端又可写为 $(Ae^{i\varphi_0})e^{i\omega t}=\widetilde{A}e^{i\omega t}$，其中 $\widetilde{A}=Ae^{i\varphi_0}$ 称为复振幅，它集振幅 A 和初相位 φ_0 于一身．

于是，简谐振动的复数表示可写为 $\widetilde{S}(t)=\widetilde{A}e^{i\omega t}$，(C. 20)；若 $\widetilde{S}(t)$ 代表位移的话，则速度和加速度为：

$\tilde{v}=\frac{d\widetilde{S}}{dt}=i\omega\widetilde{S}$，$\tilde{a}=\frac{d^2\widetilde{S}}{dt^2}=(i\omega)^2\widetilde{S}=-\omega^2\widetilde{S}$，亦即，对 t 求导数相当于乘上一个因子 iω，运算起来十分方便．

有时候需要计算两个同频简谐量乘积在一个周期里的平均值，如平均功率，这也可以用复数来运算．

设两个同频简谐量为 $\begin{cases}a_1(t)=A_1\cos(\omega t+\Phi_1)\\ a_2(t)=A_2\cos(\omega t+\Phi_2)\end{cases}$，它们的乘积在一个周期内的平均值等于：

若用相应的复数 $\begin{cases}\widetilde{a_1}(t)=A_1e^{i(\omega t+\Phi_1)}\\ \widetilde{a_2}(t)=A_2e^{i(\omega t+\Phi_2)}\end{cases}$ 来计算的话，下列公式给出同样的结果：

所以今后将用下式来计算两简谐量乘积的平均值：$\overline{a_1a_2}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\widetilde{a_1}\cdot\widetilde{a_2}^*)$，(C. 21)