也谈 2025 年新高考二卷压轴题

江 涛　　苏 淳

2025 年新高考二卷第 19 题, 即最后一道大题, 也就是俗称的压轴题, 是一道概率题. 由于其形式的新颖和不小的解答难度, 引起了广泛的关注和众多的讨论, 涌现出多种不同的解答方法和处理手法, 就思维严谨, 条理清晰而言, 其中不乏优秀的解答.

先复述一下原题, 然后再给出我们的一种解答.

19. (17 分)

甲乙两人进行乒乓球练习, 每个球胜者得分 1 分, 负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$, 乙胜的概率为 q, $p+q=1$, 且各球的胜负相互独立. 对正整数 $k \geq 2$, 记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率.

(1) 求 p_3, p_4 (用 p 表示);

(2) 若 $\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$, 求 p;

(3) 证明, 对任何正整数 m, 有

$$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}.$$

我们的解答

第**(1)(2)**两问比较简单, 略过不表, 着重谈第**(3)**问. 第**(3)**问是要求证明一个概率不等式. 该不等式虽然看似两头夹, 其实都与第 $2m$ 局的赛况有关. 所以, 我们拟从弄清 p_{2m+1} 和 p_{2m+2} 与 p_{2m} 之间的关系的目的出发, 尽量用概率语言来表述它们之间的联系.

以 X_n 表示打完 n 局后甲的得分, 那么根据题意, 有

$$\begin{aligned}&p_{2m}=P(X_{2m}\geq m+1),\\&p_{2m+1}=P(X_{2m+1}\geq m+2),\quad p_{2m+2}=P(X_{2m+2}\geq m+2).\end{aligned}$$

至于在 X_{2m+1}, X_{2m+2} 和 X_{2m} 之间, 则存在着关系式:

$$X_{2m+1}=X_{2m}+Y_1,\qquad X_{2m+2}=X_{2m}+Y_2,$$

其中 Y_1 和 Y_2 都是与 X_{2m} 独立的随机变量, 分别具有分布律

$$Y_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \qquad Y_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \end{pmatrix}.$$

上述关系式都是很好理解的. 事实上, X_{2m} 是前 $2m$ 局中甲的得分, 而 Y_1 和 Y_2 是接下来的一两局中甲的得分.

有了上述准备, 我们就可以给出 p_{2m+1} 和 p_{2m+2} 与 p_{2m} 之间的关系式.

先看 p_{2m+1}:

$$\begin{aligned}
p_{2m+1} &= P(X_{2m+1} \geq m+2) = P(X_{2m}+Y_1 \geq m+2) \\
&= P(X_{2m}+Y_1 \geq m+2,\ Y_1=1) + P(X_{2m}+Y_1 \geq m+2,\ Y_1=0) \\
&= P(X_{2m} \geq m+1)P(Y_1=1) + P(X_{2m} \geq m+2)P(Y_1=0) \\
&= P(X_{2m} \geq m+1) - P(X_{2m}=m+1)q \\
&= p_{2m} - C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m.
\end{aligned}$$

由 p 与 q 的对称性, 可得

$$q_{2m+1} = q_{2m} - C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m.$$

将上述二等式相减, 结合 $p > \frac{1}{2} > q$, 即得

$$\begin{aligned}
p_{2m+1} - q_{2m+1} &= p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m - C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m \\
&= p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1}p^m q^m(q-p) < p_{2m} - q_{2m}.
\end{aligned}$$

这就证得了不等式的前半部.

再看 p_{2m+2}:

$$\begin{aligned}
p_{2m+2} &= P(X_{2m+2} \geq m+2) = P(X_{2m}+Y_2 \geq m+2) \\
&= P(X_{2m}+Y_2 \geq m+2,\ Y_2=2) + P(X_{2m}+Y_2 \geq m+2,\ Y_2=1) \\
&\quad + P(X_{2m}+Y_2 \geq m+2,\ Y_2=0) \\
&= P(X_{2m} \geq m)P(Y_2=2) + P(X_{2m} \geq m+1)P(Y_2=1) \\
&\quad + P(X_{2m} \geq m+2)P(Y_2=0) \\
&= \Big(P(X_{2m}=m) + P(X_{2m} \geq m+1)\Big)p^2 + P(X_{2m} \geq m+1)2pq \\
&\quad + \Big(P(X_{2m} \geq m+1) - P(X_{2m}=m+1)\Big)q^2 \\
&= P(X_{2m} \geq m+1) + P(X_{2m}=m)p^2 - P(X_{2m}=m+1)q^2 \\
&= p_{2m} + C_{2m}^{m}p^{m+2}q^m - C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^{m+1}.
\end{aligned}$$

由 p 与 q 的对称性, 可得

$$q_{2m+2} = q_{2m} + C_{2m}^{m}q^{m+2}p^m - C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^{m+1}.$$

将上述二等式相减, 结合 $p > \frac{1}{2} > q$, 即得

$$\begin{aligned} p_{2m+2} - q_{2m+2} &= p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^m p^{m+2} q^m - C_{2m}^m p^m q^{m+2} \\ &= p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^m p^m q^m (p^2 - q^2) > p_{2m} - q_{2m}. \end{aligned}$$

这就证得了不等式的后半部. 至此, 我们完成了对第**(3)**问中不等式的证明.

对解答的若干评述

在完成所要求的证明之后, 我们来对解答中的一些步骤做些评述.

首先, 通过对随机变量 X_n 的引入, 我们成功地实现了对符号 p_{2m}, p_{2m+1} 和 p_{2m+2} 的数学表达, 使得我们可以用概率等式清楚地写明了什么叫做 "p_k 是打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率", 其中 $k = 2m$, $2m+1$ 和 $2m+2$.

其次, 通过对随机变量 Y_1 和 Y_2 的引入, 我们清楚地表述出 X_{2m} 与 X_{2m+1}, X_{2m+2} 之间的关系式, 使得我们在对 p_{2m+1} 和 p_{2m+2} 的演化过程无需夹杂任何说明性文字, 尤其是我们可以通过全概率公式自然地完成了对情况的分类.

概率问题往往来源于实际生活, 我们的这道题就是如此. 对于来源于生活的问题, 通过适当地引入符号, 尽可能地把文字语言表述为数学语言, 可以为进一步讨论问题打开途径.

对问题的一点引申

题目的结论告诉我们: $(p_{2m}-q_{2m}) < (p_{2m+2}-q_{2m+2})$, 这表明, 数列 $\{p_n-q_n\}$ 在考虑仅由偶数角标构成的子序列时, 是一个严格上升的数列. 但是不等式的另一端则表明, 整个数列 $\{p_n - q_n\}$ 并不是单调的.

这自然引发人们进一步探讨这个数列性质的兴趣. 问题之一是: $\{p_n - q_n\}$ 在考虑仅由奇数角标构成的子序列时, 是不是也是一个单调数列? 现在我们就对这个问题做点讨论. 我们有 $p_{2m-1} = P(X_{2m-1} \geq m+1)$ 及

$$\begin{aligned} p_{2m+1} &= P(X_{2m+1} \geq m+2) = P(X_{2m-1} + Y_2 \geq m+2) \\ &= P(X_{2m-1} + Y_2 \geq m+2,\, Y_2 = 2) + P(X_{2m-1} + Y_2 \geq m+2,\, Y_2 = 1) \\ &\quad + P(X_{2m-1} + Y_2 \geq m+2,\, Y_2 = 0) \\ &= P(X_{2m-1} \geq m)P(Y_2 = 2) + P(X_{2m-1} \geq m+1)P(Y_2 = 1) \\ &\quad + P(X_{2m-1} \geq m+2)P(Y_2 = 0) \\ &= \Big(P(X_{2m-1} = m) + P(X_{2m-1} \geq m+1)\Big)p^2 + P(X_{2m-1} \geq m+1)2pq \\ &\quad + \Big(P(X_{2m-1} \geq m+1) - P(X_{2m-1} = m+1)\Big)q^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_{2m-1} + P(X_{2m-1} = m)p^2 - P(X_{2m-1} = m+1)q^2 \\
&= p_{2m-1} + C_{2m-1}^{m} p^{m+2} q^{m-1} - C_{2m-1}^{m+1} p^{m+1} q^{m}.
\end{aligned}
$$

由 p 与 q 的对称性, 可得

$$q_{2m+1} = q_{2m-1} + C_{2m-1}^{m} q^{m+2} p^{m-1} - C_{2m-1}^{m+1} q^{m+1} p^{m}.$$

将上述二等式相减, 得知

$$
\begin{aligned}
p_{2m+1} - q_{2m+1} &= p_{2m-1} - q_{2m-1} + C_{2m-1}^{m} p^{m-1} q^{m-1}(p^3 - q^3) - C_{2m-1}^{m+1} p^{m} q^{m}(p - q) \\
&= p_{2m-1} - q_{2m-1} + p^{m-1} q^{m-1}(p - q)\Big(C_{2m-1}^{m}(p^2 + pq + q^2) - C_{2m-1}^{m+1} pq\Big).
\end{aligned}
$$

注意到

$$C_{2m-1}^{m} - C_{2m-1}^{m+1} = \frac{(2m-1)!}{m!(m-2)!}\Big(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\Big) > 0,$$

即由上式可知

$$p_{2m+1} - q_{2m+1} > p_{2m-1} - q_{2m-1}.$$

这样一来, 我们就寻得了所关心的答案: 数列 $\{p_n - q_n\}$ 在考虑仅由奇数角标构成的子序列时, 也是一个严格上升的数列.

现在我们可以给数列 $\{p_n - q_n\}$ 的单调性下一个结论了: 该数列不是单调变化的, 但是它的子列 $\{p_{2m} - q_{2m}\}$ 和 $\{p_{2m-1} - q_{2m-1}\}$ 都是严格上升的数列.