

1. 设复数 $z = 9 + 10i$ (i 为虚数单位), 若正整数 n 满足 $|z^n| \leq 2023$, 则 n 的最大值为_____.

答案: 2

解: $|z^n| = |z|^n = (\sqrt{9^2 + 10^2})^n = (\sqrt{181})^n$. 因 $|z^2| = 181 < 2023$, 而当 $n \geq 3$ 时,

$|z^n| = (\sqrt{181})^n > 13^n > 2023$, 故 n 的最大值为 2.

分析: 本题考查复数的模运算 $|z^n| = |z|^n$, 以及简单的比较大小, 需对 $(\sqrt{181})^n$ 与 2023 进行估算, 可采用放缩.

2. 若正实数 a, b 满足 $a^{\lg b} = 2$, $a^{\lg a} \cdot b^{\lg b} = 5$, 则 $(ab)^{\lg ab}$ 的值为_____.

答案: 20

解: $b^{\lg a} = 10^{\lg a \cdot \lg b} = a^{\lg b} = 2$, 所以

$$(ab)^{\lg ab} = (ab)^{\lg a + \lg b} = (a^{\lg a} \cdot b^{\lg b}) \cdot a^{\lg b} \cdot b^{\lg a} = 5 \times 2 \times 2 = 20.$$

分析: 本题考查指对运算, 考场可运用公式 $a^{\log_m b} = b^{\log_m a}$ 速解, 注意平时对一试小结论的积累.

3. 将一枚均匀的骰子独立投掷三次, 所得的点数依次记为 x, y, z , 则事件 “ $C_7^x < C_7^y < C_7^z$ ” 发生的概率为_____.

答案: $\frac{1}{27}$

解: 由于 $C_7^1 = C_7^6 < C_7^2 = C_7^5 < C_7^3 = C_7^4$, 因此当 $x, y, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 时,

事件 “ $C_7^x < C_7^y < C_7^z$ ” 发生当且仅当 “ $x \in \{1, 6\}, y \in \{2, 5\}, z \in \{3, 4\}$ ” 成立, 相应的概率为

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

分析: 本题考查组合数的单峰性(比大小)以及古典概型. 比大小时由组合数公式 $C_n^m = C_n^{n-m}$ 分散子点数 1~6 为三组, 则立刻得解. 不过本题易错点在于可能会错误地将 x, y, z 取到 7.

4. 若平面上非零向量 $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ 满足 $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2|\vec{\alpha}|$, $\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 3|\vec{\beta}|$, 则 $|\vec{\gamma}|$ 的最小值为_____.

答案: $2\sqrt{3}$

解: 由 $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, 不妨设 $\vec{\alpha} = (a, 0), \vec{\beta} = (0, b)$, 其中 $a, b > 0$, 并设 $\vec{\gamma} = (x, y)$, 则由 $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = 2|\vec{\alpha}|$ 得 $by = 2a$, 由 $\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha} = 3|\vec{\beta}|$ 得 $ax = 3b$.

所以 $|\vec{\gamma}| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{2xy} = \sqrt{2 \cdot \frac{3b}{a} \cdot \frac{2a}{b}} = 2\sqrt{3}$.

取 $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$, 此时 $x = y = \sqrt{6}$, $|\vec{\gamma}|$ 取到最小值 $2\sqrt{3}$.

分析: 本题考查向量点积运算和条件极值(均值不等式)。由 $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, 最易上手的方法是设入平面直角坐标系里运算, 将向量(复数)进行坐标表达后则化为条件极值问题, 根据 $by = 2a$ 、 $ax = 3b$ 容易想到采用均值不等式求解。

5. 方程 $\sin x = \cos 2x$ 的最小的 20 个正实数解之和为_____.

答案: 130π

解: 将 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ 代入方程, 整理得 $(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$, 解得

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

上述解亦可写成 $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$, 其中 $k = 0, 1, \dots, 19$ 对应最小的 20 个正实数解, 它们的和为

$$\sum_{k=0}^{19} \left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{19 \times 20}{2} + \frac{\pi}{6} \cdot 20 = 130\pi.$$

分析: 本题考查三角函数的周期性和二倍角公式。三角题有时得画图, 直观不易出错。解方程后对呈周期分布的解求和, 可以对解归纳成 $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$, 也可以 $20 = 6 \times 3 + 2$ 分周期求和。同时注意题目是对“正实数解”求和。

6. 设 a, b, c 为正数, $a < b$. 若 a, b 为一元二次方程 $ax^2 - bx + c = 0$ 的两个根, 且 a, b, c 是一个三角形的三边长, 则 $a + b - c$ 的取值范围是_____.

答案: $\left(\frac{7}{8}, \sqrt{5} - 1 \right)$.

解: 由条件知 $ax^2 - bx + c = a(x-a)(x-b) = ax^2 - (a^2 + ab)x + a^2b$, 比较系数得

$$b = a^2 + ab, c = a^2b, \text{ 故 } b = \frac{a^2}{1-a}, c = \frac{a^4}{1-a}, \text{ 从而}$$

$$a+b-c=a+\frac{a^2-a^4}{1-a}=a+a^2+a^3.$$

由于 $0 < a < b = \frac{a^2}{1-a}$, 故 $\frac{1}{2} < a < 1$. 此时显然 $b > c > 0$. 因此, a, b, c 是一个三角形的三

边长当且仅当 $a+c > b$, 即 $a+\frac{a^4}{1-a} > \frac{a^2}{1-a}$, 即 $a(a^2+a-1) < 0$, 结合 $\frac{1}{2} < a < 1$, 解得

$$\frac{1}{2} < a < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

令 $f(x) = x + x^2 + x^3$, 则 $a+b-c = f(a)$. 显然当 $x > 0$ 时 $f(x)$ 连续且严格递增, 故

$$a+b-c \text{ 的取值范围是 } \left(f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \right), \text{ 即 } \left(\frac{7}{8}, \sqrt{5}-1 \right).$$

分析: 本题考查解不等式和求函数值域, 在高中知识框架下, 多元取值范围问题一般都可转化为用一元函数或多元不等式求解。所以本题路线较为清晰: 由韦达定理并变形后将 b, c 用 a (参数) 表示, 根据条件解不等式求参数范围, 然后转化目标式为一元函数, 分析函数 (本题是单增函数) 求值域。本题难点也在计算量, 清晰准确地计算会比较有考验。

7. 平面直角坐标系 xOy 中, 已知圆 Ω 与 x 轴、 y 轴均相切, 圆心在椭圆

$$\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{ 内, 且 } \Omega \text{ 与 } \Gamma \text{ 有唯一的公共点 } (8, 9). \text{ 则 } \Gamma \text{ 的焦距为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案: 10

解: 根据条件, 可设圆心为 $P(r, r)$, 则有 $(r-8)^2 + (r-9)^2 = r^2$, 解得 $r = 5$ 或 $r = 29$.

因为 P 在 Γ 内, 故 $r = 5$.

$$\text{椭圆 } \Gamma \text{ 在点 } A(8, 9) \text{ 处的切线为 } l: \frac{8x}{a^2} + \frac{9y}{b^2} = 1, \text{ 其法向量可取为 } \vec{n} = \left(\frac{8}{a^2}, \frac{9}{b^2} \right).$$

$$\text{由条件, } l \text{ 也是圆 } \Omega \text{ 的切线, 故 } \vec{n} \text{ 与 } \overrightarrow{PA} \text{ 平行, 而 } \overrightarrow{PA} = (3, 4), \text{ 所以 } \frac{32}{a^2} = \frac{27}{b^2}.$$

$$\text{又 } \frac{64}{a^2} + \frac{81}{b^2} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 160, b^2 = 135. \text{ 从而 } \Gamma \text{ 的焦距为 } 2\sqrt{a^2 - b^2} = 10.$$

分析: 本题考查解析几何的相切, 要记忆清楚椭圆、圆在某点处的切线方程和焦距定义。

由圆相切的条件探求圆心信息, 通过圆心信息又探求椭圆信息。(注意圆心在椭圆内, 会舍去一根) 求出圆和椭圆的切线方程, (通过斜率, 导函数或法向量) 两直线平行求系数。

不少人算焦距时忘记 $\times 2$, 或是算成了焦准距、离心率, 导致大意失分。

已知 $P(x_0, y_0)$ 在曲线上

<1> 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1;$$

<2> 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1;$$

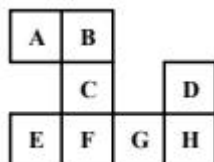
<3> 抛物线 $y^2 = 2px$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为:

$$y_0 y = p(x + x_0);$$

<4> 圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线方程为:

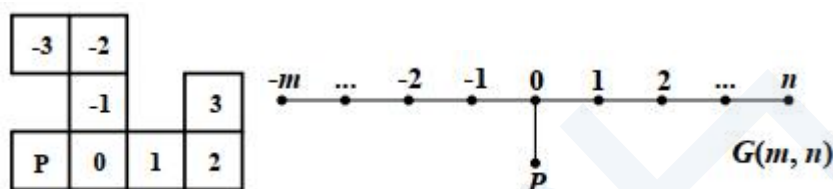
$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2.$$

8. 八张标有 A, B, C, D, E, F, G, H 的正方形卡片构成下图。现逐一取走这些卡片，要求每次取走一张卡片时，该卡片与剩下的卡片中至多一张有公共边（例如可按 D, A, B, E, C, F, G, H 的次序取走卡片，但不可按 D, B, A, E, C, F, G, H 的次序取走卡片），则取走这八张卡片的不同次序的数目为_____。



答案：392

解：如左下图重新标记原图中的8张卡片，现将每张卡片视为顶点，有公共边的两张卡片所对应的顶点之间连一条边，得到一个八阶图，该图可视为右下图中的 $m+n+2$ 阶图 $G(m, n)$ 在 $m=3, n=3$ 时的特殊情况。



取卡片（顶点）的规则可解释为：

- (i) 若顶点 P 已取走，则以下每步取当前标号最小或最大的顶点，直至取完；
- (ii) 若顶点 P 未取走，则必为某个 $G(m, n) (m, n \geq 0)$ 的情形，此时若 $m=0$ ，则将 P 视为 -1 号顶点，归结为(i)的情形；若 $m \neq 0, n=0$ ，则将 P 视为 1 号顶点，归结为(i)的情形；若 $m, n \geq 1$ ，则当前可取 P 或 $-m$ 号顶点或 n 号顶点，分别归结为(i)或 $G(m-1, n)$ 或 $G(m, n-1)$ 的情形。

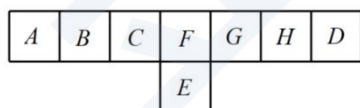
设 $G(m, n)$ 的符合要求的顶点选取次序数为 $f(m, n)$ ，本题所求即为 $f(3, 3)$ 。

由(i)、(ii)，知 $f(m, 0) = 2^{m+1} (m \geq 0)$ ， $f(0, n) = 2^{n+1} (n \geq 0)$ ，且

$$f(m, n) = 2^{m+n} + f(m-1, n) + f(m, n-1) (m, n \geq 1).$$

由此可依次计算得 $f(1, 1) = 12$ ， $f(1, 2) = f(2, 1) = 28$ ， $f(1, 3) = f(3, 1) = 60$ ， $f(2, 2) = 72$ ， $f(2, 3) = f(3, 2) = 164$ ， $f(3, 3) = 392$ ，即所求数目为 392。

分析：本题考查组合计数的递推方法和图。一种方法的关键在于对规则的翻译，即通过取卡片建立两个状态的递推关系。另一种方法是分析卡片图的链，对卡片 E 被取走的情况进行讨论，然后分类枚举求和；这种方法的难点一般在于找好分类依据。



如图拉成条状，找分类依据， E 比较特殊，以 E 的位置分类：

E 在第 1 或 2 或 3 或 4 个： $2^6 \cdot 4 = 64 \cdot 4 = 256$

E 在第 5 个： $(2^4 - 2) \cdot 2^2 = 56$ E 在第 6 个： $C_5^2 \cdot 2 \cdot 2 = 40$

E 在第 7 个： $C_6^3 = 20$ E 在第 8 个： $C_6^3 = 20$

总共： $256 + 56 + 40 + 20 + 20 = 392$

两种方法的入手点都是先抽象出八阶图，然后对顶点 P （即卡片 E ）分析。本题还需仔细计算，易算错。

9. 平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $\Gamma: y^2 = 4x$ ， F 为 Γ 的焦点， A, B 为 Γ 上的两个不重合的动点，使得线段 AB 的一个三等分点 P 位于线段 OF 上（含端点），记 Q 为线段 AB 的另一个三等分点. 求点 Q 的轨迹方程.

解：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，不妨设 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$ ，则 $P\left(\frac{2x_1+x_2}{3}, \frac{2y_1+y_2}{3}\right)$.

易知 $F(1,0)$ ，由于点 P 位于线段 OF 上，故 $\frac{2x_1+x_2}{3} \in [0,1]$ ， $\frac{2y_1+y_2}{3} = 0$.

.....4 分

可设 $y_1 = t, y_2 = -2t$ ，则 $x_1 = \frac{t^2}{4}, x_2 = t^2$. 此时有 $\frac{2x_1+x_2}{3} = \frac{r^2}{2} \in [0,1]$ ，且由 A, B 不重合知 $t \neq 0$ ，所以 $t^2 \in (0,2]$.

.....8 分

设 $Q(x_Q, y_Q)$ ，则 $x_Q = \frac{x_1+2x_2}{3} = \frac{3}{4}t^2$ ， $y_Q = \frac{y_1+2y_2}{3} = -t$ ，有 $y_Q^2 = \frac{4}{3}x_Q$.

注意到 $x_Q = \frac{3}{4}t^2 \in \left(0, \frac{3}{2}\right]$ ，故点 Q 的轨迹方程为 $y^2 = \frac{4}{3}x (0 \leq x \leq \frac{3}{2})$.

.....16 分

分析：本题考查解析几何，根据定比分点公式可由 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 导出 P, Q 两点坐标，结合条件求参数极值并立得关系式，最后消参得轨迹方程。这是一种常见的轨迹方程的求法。本题比较简单，不过在设点的技巧上可以有所优化：例如先设点 P 的坐标 $P(a,0)$ 、 $A(2x-a, 2y)$ 、 $B(2a-x, -y)$ 。在平时训练中，解析几何题可以多关注设点的技巧，设点巧妙可大大简化计算量以提高准确率。

同时，本题最后轨迹方程中 x 范围内没有 0，即剔除点。解析几何中常常会这样设坑，所以经常会有人丢失取值范围的分，应当注意。

10. 已知三棱柱 $\Omega: ABC - A_1B_1C_1$ 的 9 条棱长均相等. 记底面 ABC 所在平面为 α ，若 Ω 的另外四个面（即面 $A_1B_1C_1, ABB_1A_1, ACC_1A_1, BCC_1B_1$ ）在 α 上投影的面积从小到大重排后依次为 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}$ ，求 Ω 的体积.

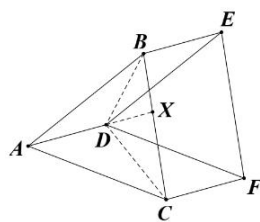
解：设点 A_1, B_1, C_1 在平面 α 上的投影分别为 D, E, F ，则面 $A_1B_1C_1, ABB_1A_1, ACC_1A_1, BCC_1B_1$ 在 α 上的投影面积分别为 $S_{\triangle DEF}, S_{ABED}, S_{ACFD}, S_{BCFE}$.

由已知及三棱柱的性质， $\triangle DEF$ 为正三角形，且 $ABED, ACFD, BCFE$ 均为平行四边形.

由对称性，仅需考虑点 D 位于 $\angle BAC$ 内的情形（如图所示）.

显然此时有 $S_{ABED} + S_{ACFD} = S_{BCFE}$.

.....5 分



由于 $\{S_{\triangle DEF}, S_{ABED}, S_{ACFD}, S_{BCFE}\} = \{2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{3}, 5\sqrt{3}\}$, 故 S_{ABED}, S_{ACFD} 必为 $2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ 的排列, $S_{BCFE} = 5\sqrt{3}$, 进而 $S_{\triangle DEF} = 4\sqrt{3}$, 得 $\triangle DEF$ 的边长为 4, 即正三棱柱 Ω 的各棱均为 4.

.....10 分

不妨设 $S_{ABED} = 2\sqrt{3}$, $S_{ACFD} = 3\sqrt{3}$, 则 $S_{\triangle ABD} = \sqrt{3}$, $S_{\triangle ACD} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

取射线 AD 与线段 BC 的交点 X , 则 $\frac{BX}{CX} = \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{2}{3}$, 故 $BX = \frac{8}{5}$. 因此

$$AX = \sqrt{AB^2 + BX^2 - 2AB \cdot BX \cdot \cos 60^\circ} = \frac{4}{5}\sqrt{19},$$

而 $\frac{AD}{AX} = \frac{S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{8}$, 故 $AD = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

.....15 分

于是 Ω 的高 $h = \sqrt{AA_1^2 - AD^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

又 $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$, 故 Ω 的体积 $V = S_{\triangle ABC} \cdot h = 6\sqrt{15}$.

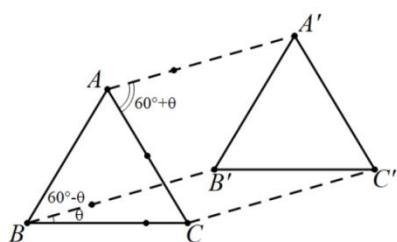
.....20 分

分析: 本题考查立体几何, 后者需厘清投影面积之间的关系。本题是立体几何中常见的体积问题, 背景也是结构相对熟悉的三棱柱, 但条件简洁, 数量关系不清楚, 题目反套路, 不易下手。在分析柱体特点时, 对空间想象能力有较高要求。

首先需明白, 在平面 α 上的投影图像是一个等边三角形和三个平行四边形, 接着最重要的即是意识到两个平行四边形的面积之和为另一个平行四边形的面积之和, 这一点的发现较为关键在意识到, 之后就可以得到各个图形的面积, 然后得到等边三角形边长。

注意到要求三棱柱的体积, 则只需求出它的高, 需意识到已知棱长, 那么求出高只需求出 AD 再利用勾股定理即可。运用余弦定理和面积比则求 AD 。

另一个比较好的思路是引入角度, 将面积量化, 借助三角方程运算给出结果。实际运算时, 拿一个面举例也可作如下分析:



如图, 设 $\angle B'BC = \theta, 0 < \theta < 30^\circ$, $AB = BC = CA = a, AA' = BB' = CC' = x$,

$S_{BCC'B'} = ax \sin \theta, S_{ABB'A'} = ax \sin(60^\circ - \theta), S_{ACC'A'} = ax \sin(60^\circ + \theta)$, 注意到,

$ax \sin(60^\circ + \theta) - ax \sin(60^\circ - \theta) = ax \sin \theta$, 所以 $5\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$,

$ax \sin(60^\circ + \theta) = 5\sqrt{3}, ax \sin \theta = 2\sqrt{3}, ax \sin(60^\circ - \theta) = 3\sqrt{3}$, $\frac{ax \sin(60^\circ - \theta)}{ax \sin \theta} = \frac{3}{2}$,

可得 $\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $\sin \theta = \sqrt{\frac{3}{19}}$, $ax = 2\sqrt{19}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$, 所以

$x = \frac{\sqrt{19}}{2}$, 棱柱的高 $h = \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $V = Sh = 4\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} = 6\sqrt{15}$, 其

它投影位置同理可得

11. 求出所有满足下面要求的不小于1的实数 t : 对任意 $a, b \in [-1, t]$, 总存在 $c, d \in [-1, t]$, 使得 $(a+c)(b+d) = 1$.

解: 记 $I_t = [-1, t]$, $S = (a+c)(b+d)$.

假如 $t > 2$, 则当 $a = b = t$ 时, 对任意 $c, d \in I_t$, 均有 $S \geq (t-1)^2 > 1$, 不满足要求.

假如 $1 \leq t < \frac{3}{2}$, 则当 $a = -1, b = 2-t$ 时, 对任意 $c, d \in I_t$, 均有

$$-2 \leq a+c \leq t-1, 1-t \leq b+d \leq 2$$

若 $a+c, b+d$ 同正或同负, 则 $S \leq 2(t-1) < 1$, 其余情况下总有 $S \leq 0 < 1$, 不满足要求.

.....5 分

以下考虑 $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$ 的情形. 为便于讨论, 先指出如下引理.

引理: 若 $u, v \geq \frac{1}{2}$, 且 $u+v \geq \frac{5}{2}$, 则 $uv \geq 1$.

事实上, 当 $|u-v| \leq \frac{3}{2}$ 时, $uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1$.

当 $|u-v| > \frac{3}{2}$ 时, $uv > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 1$. 引理得证.

下证对任意 $a, b \in I_t$, 可取 $c_1, d_1 \in I_t$, 使得

$$S_1 = (a+c_1)(b+d_1) \geq 1. \quad \textcircled{1}$$

若 $a+b \leq -\frac{1}{2}$, 则取 $c_1 = d_1 = -1$, 此时

$$S_1 = (a-1)(b-1) = (1-a)(1-b),$$

其中 $1-a \geq \frac{3}{2} + b \geq \frac{1}{2}$, $1-b \geq \frac{3}{2} + a \geq \frac{1}{2}$, 且 $(1-a) + (1-b) = 2 - (a+b) \geq \frac{5}{2}$, 故由引理知 $S_1 \geq 1$.

若 $a+b > -\frac{1}{2}$, 则取 $c_1 = d_1 = \frac{3}{2} \in I_t$, 此时

$$S_1 = \left(a + \frac{3}{2}\right)\left(b + \frac{3}{2}\right),$$

其中 $a + \frac{3}{2}, b + \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$, 且 $\left(a + \frac{3}{2}\right) + \left(b + \frac{3}{2}\right) = a + b + 3 > \frac{5}{2}$, 故由引理知 $S_1 \geq 1$.

.....15 分

注意到, 当 $a, b \in I_t$ 时, 可取 $c_2 \in I_t$, 使得 $|a + c_2| \leq 1$ (例如, 当 $a \in [-1, 1]$ 时取 $c_2 = 0$, 当 $a \in (1, t]$ 时取 $c_2 = -1$), 同理, 可取 $d_2 \in I_t$, 使得 $|b + d_2| \leq 1$. 此时

$$S_2 = (a + c_2)(b + d_2) \leq |a + c_2| \cdot |b + d_2| \leq 1. \quad \textcircled{2}$$

根据①、②, 存在一个介于 c_1, c_2 之间的实数 c , 及一个介于 d_1, d_2 之间的实数 d , 使得 $(a+c)(b+d)=1$, 满足要求.

综上, 实数 t 满足要求当且仅当 $\frac{3}{2} \leq t \leq 2$.

.....20 分

分析: 本题考查函数和不等式的相关知识, 核心是**介值定理**, 将存在 c, d 使 $(a+c)(b+d)=1$ 转化为 $(a+c)(b+d)$ 的范围包括 1。一个较简单的想法就是分别考虑 $a+c, b+d > 0$ 和 $a+c, b+d < 0$, 前者的最小值为 0, 最大值为 $(a+t)(b+t)$; 后者最小值是 0, 最大值比较复杂, 因此只要两者之一的最大值大于 1 即可。但从这样一个简单的想法也能得到答案, 所以这道题关键在于理解好题目(利用介值定理)。也可以运用比较巧的想法, 通过先代入 a, b 的特殊值得到的范围, 然后再加以证明这也是标准答案的想法。当然, 这种想法一定程度上也依赖于上面的分析。因此本题其实只要求对函数最值有深刻的理解即可。

另外, 本题的四元函数形式, 也可联想到用向量求解。可以得到一个清晰的妙法:

考虑向量 $\overrightarrow{OP} = (a, c), \overrightarrow{PQ} = (b, d)$ ，由题意，两个向量可取范围为一个正方形。

题意即对于正方形内任意的向量 $\overrightarrow{OP} = (a, c)$ ，都存在向量 $\overrightarrow{PQ} = (b, d)$ ，使得 Q 落在双曲线 $xy=1$ 上。即以 P 为中心，左 1 下 1 右 1 上 1 范围所围成的正方形 τ_P 与双曲线 $xy=1$ 有交点。易知，这等价于存在 τ_P 某两个个顶点，一个在双曲线内部（即 $xy \geq 1$ ），一个在双曲线外部（即 $xy \leq 1$ ）

(1) 当点 P 落在第一象限且在双曲线外部时，此时 τ_P 右上角顶点显然位于双曲线 $xy=1$ 内，对 t 无要求。

(2) 当点 P 落在第一象限且在双曲线内部时，此时 τ_P 左下角顶点需位于双曲线 $xy=1$ 外，只需要考虑极端情况，即 $P(t, t)$ ，这时要求 $(t-1)(t-1) \leq 1$ ，所以 $t \leq 2$ 。

(3) 当点 P 落在第三象限时，此时 τ_P 左下角顶点显然位于双曲线 $xy=1$ 内，对 t 无要求。

(4) 当点 P 落在第二象限（第四象限对称同理）时，此时要求 τ_P 左下角或者右上角顶点至少有一个位于双曲线 $xy=1$ 内，考虑最坏情况，即 τ_P 左下角或者右上角顶点同时落在双曲线 $xy=1$ 上，即

$$\begin{cases} (a-1)(b-1)=1 \\ (a+t)(b+t)=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} t=1-ab \\ a+b=ab \end{cases}.$$

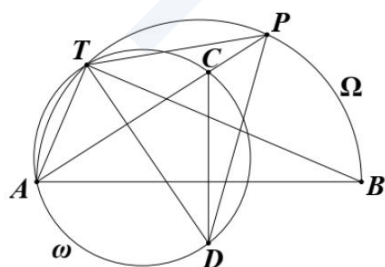
因为 $-1 \leq a = \frac{b}{b-1} \leq 0$ ，所以 $\frac{1}{2} \leq b < 1$ ，所以 $ab = \frac{b^2}{b-1} = b-1 + \frac{1}{b-1} + 2 \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$

所以 $t = 1 - ab \geq \frac{3}{2}$ 。

加试

一、如图， Ω 是以 AB 为直径的固定的半圆弧， ω 是经过点 A 及 Ω 上另一个定点 T 的定圆，且 ω 的圆心位于 $\triangle ABT$ 内。设 P 是 Ω 的弧 TB （不含端点）上的动点， C, D 是 ω 上的两个动点，满足： C 在线段 AP 上， C, D 位于直线 AB 的异侧，且 $CD \perp AB$ ，记 $\triangle CDP$ 的外心为 K ，证明：

- (1) 点 K 在 $\triangle TDP$ 的外接圆上；
- (2) K 为定点。



证明：（1）易知 $\angle PCD$ 为钝角，由 K 为 $\triangle CDP$ 的外心知

$$\angle PKD = 2(180^\circ - \angle PCD) = 2\angle ACD.$$

由于 $\angle APB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ ，故 $\angle PBA = \angle ACD = \angle ATD$.

.....10 分

所以 $\angle PTD + \angle PKD = \angle PTA - \angle ATD + 2\angle ACD = \angle PTA + \angle PBA = 180^\circ$.

又 K, T 位于 PD 异侧，因此点 K 在 $\triangle TDP$ 的外接圆上.

.....20 分

（2）取 ω 的圆心 O ，过点 O 作 AB 的平行线 l ，则 l 为 CD 的中垂线，点 K 在直线 l 上.

.....30 分

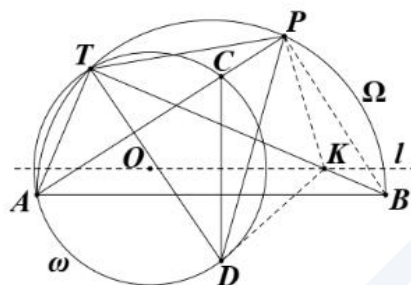
由 T, D, P, K 共圆及 $KD = KP$ ，可知 K 在 $\angle DTP$ 的平分线上，而

$$\angle DTB = 90^\circ - \angle ATD = 90^\circ - \angle PBA = \angle PAB = \angle PTB,$$

故 TB 为 $\angle DTP$ 的平分线，所以点 K 在直线 TB 上.

显然 l 与 TB 相交，且 l 与 TB 均为定直线，故 K 为定点.

.....40 分



分析：本题分了两个小问，第一问**导角**即可，并且对于第二问有明显的辅助作用。注意到本题实际上决定了整个图形的是点 P 以及过 $ATCD$ 这四点的圆，那么关键就是 K 如何与这两个变量无关。事实上在解决第一问之后，注意到 T 在 DP 中垂线上，那么由第一问的结论可知， KD 和 KP 所对圆周角相等得到 K 在 $\angle DTP$ 角平分线上，即定直线 TB 上（这也是**精确作图**容易发现的结论）。另一方面 CD 的中垂线过点 K 且过点的圆心 O 并垂直于 CD 。所以它也是定直线，由此得 K 是定直线的交点。本题中间转化全部通过导角得到，较为简单，需要发现的定直线也是由作图可以直接发现的，再加上有第一问引导，本题整体得分会偏高。

二、正整数 n 称为“好数”，如果对任意不同于 n 的正整数 m ，均有 $\left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\} \neq \left\{ \frac{2^m}{m^2} \right\}$ ，这里，

$\{x\}$ 表示实数 x 的小数部分’.

证明：存在无穷多个两两互素的合数均为好数.

证明：引理：设 n 是正奇数，且 2 模 n 的阶为偶数，则 n 是好数.

引理的证明：反证法.假设 n 不是好数，则存在异于 n 的正整数 m ，使得 $\left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\} = \left\{ \frac{2^m}{m^2} \right\}$.

因此 $\frac{2^n}{n^2}$ 与 $\frac{2^m}{m^2}$ 写成既约分数后的分母相同. 由 n 为奇数知 $\frac{2^n}{n^2}$ 是既约分数, 故 m^2 的最大奇因子为 n^2 , 从而 m 的最大奇因子为 n .

设 $m = 2^t n$, 其中 t 为正整数 (从而 m 是偶数). 于是 $\frac{2^m}{m^2} = \frac{2^{m-2t}}{n^2}$.

由 $\left\{ \frac{2^{m-2t}}{n^2} \right\} = \left\{ \frac{2^n}{n^2} \right\}$ 可得 $2^{m-2t} \equiv 2^n \pmod{n^2}$, 故

$$2^{m-2t} \equiv 2^n \pmod{n} \quad (*)$$

设 2 模 n 的阶为偶数 d , 由 (*) 及阶的基本性质得 $m-2t \equiv n \pmod{d}$, 故 $m-2t-n$ 是偶数. 但 $m-2t$ 是偶数, n 是奇数, 矛盾. 引理得证.

.....20 分

回到原问题.

设 $F_k = 2^{2^k} + 1 (k=1,2,\dots)$, 由于 $F_k \mid 2^{2^{k+1}} - 1$, 而 $F_k \nmid 2^{2^k} - 1$, 因此 2 模 F_k 的阶为 2^{k+1} , 是一个偶数.

对正整数 l , 由 $2^l \equiv 1 \pmod{F_k^2}$ 可知 $2^l \equiv 1 \pmod{F_k}$, 故由阶的性质推出, 2 模 F_k^2 的阶被 2 模 F_k 的阶整除, 从而也是偶数. 因 F_k^2 是奇数, 由引理知 F_k^2 是好数.

.....30 分

对任意正整数 $i, j (i < j)$, $(F_i, F_j) = (F_i, (2^{2^i} - 1)F_i F_{i+1} \dots F_{j-1} + 2) = (F_i, 2) = 1$,

故 $F_1, F_2, F_3, \dots$ 两两互素. 所以 $F_1^2, F_2^2, F_3^2, \dots$ 是两两互素的合数, 且均为好数.

.....40 分

分析: 本题考虑方式较为自然, 对于熟练掌握阶的基本功的人应该可以在较短时间内解决, 因为 2021 年联赛考过阶, 所以本题目对很多人应该都能上手. 以下提供一种想法, 由此出发标答考虑费马数的想法则也是不奇怪的:

对于 $\frac{2^n}{n}$ 与 $\frac{2^m}{m}$, $m \neq n$, 既然希望数列的小数部分不同, 贪心的想法即是希望既约分母

与 n 的既约分母不同, 所以在考虑的时候我们自然希望 n 是奇素数的方幂, 形如 p^a (因为需要是合数, ap 需要满足的条件待定), 这样一来, 因为分子总是 2 的方幂, 只能约去分母中 2 的方幂部分, 所以只需要考虑 $m = 2^k p^b$ 的情形即可, 考虑既约分母里 p 的幂次容易知道必须有 $b = a$. 小数部分相同等价于差为整数, 那么本题转化为怎样取 p, a 使得:

$2^{2^k p^a - 2k} \equiv 2^{p^a} \pmod{p^a}$, 对正整数 k 不可能成立. 上式成立的必要条件是 2 模 p 的阶 d 满足 $d \mid 2^k p^a - 2k - p^a$.

对于正整数 k , 右边是个奇数, 所以只需要 d 是偶数即可让这个式子对正整数 k 不成立, 再任取大于 1 的整数 a 即得一个好数 $n = p^a$ 且为合数. 于是问题变为寻求无穷多个素数 p

使得 2 模 p 的阶是偶数，到这里就有很多做法了，但最终基本都能过渡到费马数。

可以考虑费马数的素因子，它们的阶总是 2 的方幂，自然是偶数；用二次剩余也容易考虑，只要 2 是二次非剩余，那么它的阶就整除 $p-1$ 但不整除 $\frac{p-1}{2}$ ，从而必须有素因子 2 ，故必须是偶数，考虑二次非剩余的角度有两种思路：一是由二次互反律或熟知的结论等价于模 8 余 $3, 5$ 的素数无穷多，这是 Dirichlet 定理的结果但超出联赛范围。二是考虑，是 $2^{2^d}-1$ 的素因子的素数但又不是 2^d-1 的素因子的素数，则 2 模它的阶整除 $2d$ 但不整除 d ，所以有素因子 2 ，这样就好数的存在性可以完全避开费马数或高级结论，但最后需要不同的 d 用到不同的素数来保证互素，这样可以利用简单的同余分析来构造与之前有限个不同的新素数。最快的办法还是取费马数。

还可以希望 d 是阶所以需要 $2d+1$ 不能因式分解，仍然可以联想到费马数。若知道较多背景知识，还可以考虑分圆多项式，取 x 为 2 的充分大方幂，费马数相当于这里的特殊情况，或使用 Zsigmondy 定理等，均可以得到更强的结论顺便解决本题目，同时在别的与阶相关但更难的题目里也可以考虑这些想法。本题基本就是想怎么做就怎么做，但杀鸡用牛刀在这道简单题里大概率会导致扣分。

三、求具有下述性质的最小正整数 k ：若将 $1, 2, \dots, k$ 中的每个数任意染为红色或蓝色，则或者存在 9 个互不相同的红色的数 $x_1, x_2, \dots, x_9$ 满足 $x_1 + x_2 + \dots + x_8 < x_9$ ，或者存在 10 个互不相同的蓝色的数 $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ 满足 $y_1 + y_2 + \dots + y_9 < y_{10}$ 。

解：所求的最小正整数为 408 。

一方面，若 $k=407$ 时，将 $1, 55, 56, \dots, 407$ 染为红色， $2, 3, \dots, 54$ 染为蓝色，此时最小的 8 个红数之和为 $1+55+56+\dots+61=407$ ，最小的 9 个蓝数之和 $2+3+\dots+10=54$ ，故不存在满足要求的 9 个红数或者 10 个蓝数。

对 $k < 407$ ，可在上述例子中删去大于 k 的数，则得到不符合要求的例子。

因此 $k \leq 407$ 不满足要求。

.....10 分

另一方面，我们证明 $k=408$ 具有题述性质。

反证法：假设存在一种 $1, 2, \dots, 408$ 的染色方法不满足要求，设 R 是所有红数的集合， B 是所有蓝数的集合，将 R 中的元素从小到大依次记为 $r_1, r_2, \dots, r_m$ ， B 中的元素从小到大依次记为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ ， $m+n=408$ 。对于 R ，或者 $|R| \leq 8$ ，或者 $r_1 + r_2 + \dots + r_8 \geq r_m$ ；对于 B ，或者 $|B| \leq 9$ ，或者 $b_1 + b_2 + \dots + b_9 \geq b_n$ 。

在 $1, 2, \dots, 16$ 中至少有 9 个蓝色的数或至少有 8 个红色的数。

情形 1： $1, 2, \dots, 16$ 中至少有 9 个蓝色的数。

此时 $b_9 \leq 16$ ，设区间 $[1, b_9]$ 中共有 t 个 R 中的元素 $r_1, r_2, \dots, r_t$ ($0 \leq t < 8$)。

记 $x = r_1 + r_2 + \dots + r_t$ ，则 $x \geq 1 + 2 + \dots + t = \frac{1}{2}t(t+1)$ 。

因为 $b_1, b_2, \dots, b_9, r_1, r_2, \dots, r_t$ 是 $[1, b_9]$ 中的所有正整数，故

$$\{b_1, b_2, \dots, b_9, r_1, r_2, \dots, r_t\} = \{1, 2, \dots, 9+t\}.$$

$$\text{于是 } b_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_9 = 1 + 2 + \dots + (9+t) - x = \frac{1}{2}(9+t)(10+t) - x. \quad (*)$$

.....20 分

特别地, $b_n \leq \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136$, 从而 $|R| \geq 9$.

对任意 $i(1 \leq i \leq m-t)$, 由(*)知 $r_{i+1} \leq b_n + i \leq \frac{1}{2}(9+t)(10+t) - x + i$, 从而

$$\begin{aligned} r_m &\leq r_1 + \dots + r_t + r_{t+1} + \dots + r_8 \leq x + \sum_{i=1}^{8-t} \left(\frac{1}{2}(9+t)(10+t) - x + i \right) \\ &= \frac{1}{2}(9+t)(10+t)(8-t) + \frac{1}{2}(8-t)(9-t) - (7-t)x \\ &\leq \frac{1}{2}(9+t)(10+t)(8-t) + \frac{1}{2}(8-t)(9-t) - (7-t) \cdot \frac{1}{2}t(t+1) \end{aligned}$$

$= -8t^2 + 19t + 396 \leq 407$ (考虑二次函数对称轴, 即知 $t=1$ 时取得最大).

又 $b_n \leq 136$, 这与 b_n, r_m 中又一个为 408 矛盾.

.....40 分

情形 2: 1, 2, ..., 16 中至少有 8 个红色的数.

论证类似于情形 1.

此时 $r_8 \leq 16$. 设区间 $[1, r_8]$ 中共有 s 个 B 中的元素 $b_1, b_2, \dots, b_s (0 \leq s < 9)$.

记 $y = b_1 + \dots + b_s$, 则 $y \geq \frac{1}{2}s(s+1)$.

因为 $b_1, b_2, \dots, b_s, r_1, r_2, \dots, r_8$ 是 $[1, r_8]$ 中的所有正整数, 故

$$\{b_1, b_2, \dots, b_s, r_1, r_2, \dots, r_8\} = \{1, 2, \dots, 8+s\}.$$

于是 $r_m \leq \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136$. 从而 $|B| \geq 10$.

对任意 $i(1 \leq i \leq n-s)$, 有 $b_{s+i} \leq r_m + i \leq \frac{1}{2}(8+s)(9+s) - y + i$. 从而

$$\begin{aligned} b_n &\leq b_1 + \dots + b_s + b_{s+1} + \dots + b_9 \leq y + \sum_{i=1}^{9-s} \left(\frac{1}{2}(8+s)(9+s) - y + i \right) \\ &= \frac{1}{2}(9-s)(8+s)(9+s) - (8-s)y + \frac{1}{2}(9-s)(10-s) \\ &\leq \frac{1}{2}(9-s)(8+s)(9+s) - (8-s) \cdot \frac{1}{2}s(s+1) + \frac{1}{2}(9-s)(10-s) \end{aligned}$$

$= -7s^2 + 27s + 369 \leq 395$ (在 $s=2$ 时取得最大)

又 $r_m \leq 136$, 这与 b_n, r_m 有一个为 408 矛盾.

由情形 1、2 知 $k=408$ 具有题述性质.

综上, 所求最小正整数 k 为 408.

.....50 分

分析: 本题是一道代数意味比较重的组合题目, 和 2022 年联赛第三题异曲同工但难度低些.

首先难在如何猜出 407、408，如果这个 k 不满足条件，从任何一种颜色入手，需要这种颜色最小的几个数之和不小于最大的数，或者这种颜色的数数目很少以至于取不出来这么多个数，前一种情况说明最大数会有一个上界，后一种情况则说明另一个颜色的数相对多，又变回前一种情况。

在这种想法的引导下，我们先选定一个范围 $[1, m]$ ，由**抽屉原理**，某种颜色的数至少在其中占了一半。从而，如果 $m \geq 16$ ，要么红色占了一半，使得红色的最大数可以由此范围内的 8 个数进行估计，要么蓝色的最大数可由此中 9 个数进行估计。综合两种情形可以得出 k 的两个上界。大概思路如此，但计算时需要格外小心，做到**精细**才能得到准确的结果。

后续构造是此前的取等条件容易得到的。

四、设 $a = 1 + 10^4$ ，在 2023×2023 的方格表的每个小方格中填入区间 $[1, a]$ 中的一个实数。

设第 i 行的总和为 x_i ，第 i 列的总和为 y_i ， $1 \leq i \leq 2023$ ，求 $\frac{y_1 y_2 \cdots y_{2023}}{x_1 x_2 \cdots x_{2023}}$ 的最大值。（答案用含 a 的式子表示）。

解：记 $n = 2023$ ，设 $(a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ ， $\lambda = \frac{y_1 y_2 \cdots y_{2023}}{x_1 x_2 \cdots x_{2023}}$ 。

第一步：改变某个 a_{ij} 的值仅改变 x_i 和 y_j ，设第 i 行中除 a_{ij} 外其余 $n-1$ 个数的和为 A ，第 j 列中除 a_{ij} 外其余 $n-1$ 个数的和为 B ，则

$$\frac{y_j}{x_i} = \frac{B + a_{ij}}{A + a_{ij}}.$$

当 $A \geq B$ 时，关于 a_{ij} 递增，此时可将 a_{ij} 调整到 a ， λ 值不减。当 $A \leq B$ 时，关于 a_{ij} 递减，此时可将 a_{ij} 调整到 1， λ 值不减。因此，为求 λ 的最大值，只需考虑每个小方格中的数均为 1 或 a 的情况。

……………10 分

第二步：设 $a_{ij} \in \{1, a\}, 1 \leq i, j \leq n$ ，只存在有限多种可能，我们选取一组 a_{ij} 使得 λ 达到最大值，并且 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 最小。此时我们有

$$a_{ij} = \begin{cases} a, x_i > y_j \\ 1, x_i \leq y_j \end{cases} \quad (*)$$

事实上，若 $x_i > y_j$ ，而 $a_{ij} = 1$ ，则将 a_{ij} 改为 a 后， λ 不减，且 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}$ 变小，与 a_{ij} 的选取矛盾。从而 $(*)$ 成立。

通过交换列，可不妨设 $y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$ ，这样由 $(*)$ 可知每一行中 a 排在 1 的左边，每一行中的数从左至右单调不减。由此可知 $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ 。因此只能 $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$ ，故每一行中的数全都相等（全为 1 或全为 a ）。

第三步：由第二步可知求 λ 的最大值，可以假定每一行中的数全相等。设有 k 行全为 a ，有 $n-k$ 行全为 1， $0 \leq k \leq n$ 。此时

$$\lambda_k = \frac{(ka+n-k)^n}{(na)^k n^{n-k}} = \frac{(ka+n-k)^n}{n^n a^k}$$

我们只需求 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ 中的最大值.

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{\frac{((k+1)a+n-k-1)^n}{n^n a^{k+1}}}{\frac{(ka+n-k)^n}{n^n a^k}} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a-1}{k(a-1)+n}\right)^n$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} \geq 1 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{a-1}{k(a-1)+n}\right)^n \geq a \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{x^{n-1}}{k(x^n-1)+n} \geq x \quad (\text{记 } x = \sqrt[n]{a}) \\ &\Leftrightarrow \frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}}{k(x^n-1)+n} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow k \leq \frac{1+x+x^2+\dots+x^{n-1}-n}{x^n-1} \\ &= \frac{1+(1+x)+\dots+(1+x+\dots+x^{n-2})}{1+x+\dots+x^{n-1}} \end{aligned}$$

记上式右边为 y , 则 $y = \frac{n-1+(n-2)x+\dots+x^{n-1}}{1+x+\dots+x^{n-1}}$.

.....30 分

下面证明 $y \in (1010, 1011)$.

首先证明 $y < 1011$.

$$\begin{aligned} y < 1011 &\Leftrightarrow 2022 + 2021x + \dots + x^{2021} < 1011 + 1011x + \dots + 1011x^{2022} \\ &\Leftrightarrow 1011 + 1010x + \dots + x^{1010} < x^{1012} + 2x^{1013} + \dots + 1010x^{2021} + 1011x^{2022} \end{aligned}$$

由于 $1 < x < x^2 < \dots < x^{2023}$, 故

$$\sum_{i=0}^{1010} (1011-k)x^k < \frac{1}{2} \cdot 1011 \cdot 1012 x^{1010} < \frac{1}{2} \cdot 1011 \cdot 1012 x^{1012} < \sum_{k=0}^{1013} kx^{1011+k}$$

.....40 分

再证明 $y > 1010$, 等价于证明 $\sum_{k=0}^{2021} (2022-k)x^k > 1010 \sum_{k=0}^{2022} x^k$,

由于

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2021} (2022-k)x^k &> \sum_{k=0}^{2021} (2022-k) = 1011 \times 2023, \\ 1010 \sum_{k=0}^{2022} x^k &< 1010 \times 2023 x^{2022} < 1010 \times 2023 a, \end{aligned}$$

只需证明 $1011 \times 2023 > 1010 \times 2023a$, 而 $a = 1 + 10^{-4} < \frac{1011}{1010}$, 故结论成立.

由上面的推导可知 $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ 当且仅当 $k \leq 1010$ 时成立, 从而 λ_{1011} 最大. 故

$$\lambda_{\max} = \lambda_{1011} = \frac{(1011a + 1012)^{2023}}{2023^{2023} a^{1011}}.$$

.....50 分

分析: 本题通过**调整法**解决是不难的, 思路也比较自然, 调整到端点化为**离散不等式**, 再考虑离散变量之间的关系。

注意到任何一个方格恰在唯一的一行或者一列中, 且不同变量之间互相独立, 所以改变任意一个变量分子分母只会有一项受到影响, 故由**主元法**和糖水不等式可以立刻得到最值在 $1, a$ 端点处取得, 也可以通过取对数再计算导数得到, 并且应该往哪个端点调整也是由所在行列的信息完全决定。

于是本题变为一个离散不等式, 所有变量取值在 $\{1, a\}$ 中, 有限个取值所以必有最大值 (或者在第一步的时候利用紧集上的连续函数必有最大值亦可, 细节问题), 从而可以利用**极端原理**从最大值入手探寻取得最大值的必要条件。

容易发现交换方格表的行与行、列与列, 函数值不变, 所以我们可以对于所有行或者所有列的 x_i, y_j (且可以同时) 进行排序。仍然对于某一个方格内的变量作为主元进行考虑可得在行和大于列和时应该是 a , 否则是 1 , 故同一行里的所有数均相等, 这样本题变成了只依赖于全为 a 的行数 k 的一个不等式。到此为止我们并没有用到 $a-1$ 充分小的条件。即求:

$k \in \{1, 2, \dots, n = 2023\}$, 使得 $\lambda_k = \frac{(ka + n - k)^n}{(na)^k n^{n-k}} = \frac{(ka + n - k)^n}{n^n a^k}$ 最大, 自然考虑相邻两项

相除来判断这种乘积形式的数列单调性, 这样可以分离出形如 $k \leq y$ 的不等式作为 k 需要满足数列递增的充要条件。

接着则进入本题的另一难点, 估算

$$y = \frac{(n-1) \times 1 + (n-2) \cdot a^{1/n} + (n-3) \cdot a^{2/n} + \dots + 1 \times a^{n-2/n}}{1 + a^{1/n} + a^{2/n} + \dots + a^{n-1/n}},$$

从而计算它的整数部分。

对于知道分析中一些基本估计技巧的人来说这是不难的: 因为 a 非常接近 1 , 对于 $n = 2023$ 这样的误差很小, 所以大致可以猜测 y 应该接近 1011 (当然具体大小还需精确估计)。

严格地说, 在这个估计的诱导下, 我们试图考虑 y 与 $1010, 1011, 1012$ 的关系来寻求真正的最佳估计, 需要注意到为了保证精确性, 应尽量化成整式而非有理式进行估计且不等号两侧应都是符号相同的项。注意到因为 a 很接近 1 , 所以主要影响大小关系的会是项数, 因此可以大胆地把 a 的方幂放缩 (根据在不等式小的一边还是大的一边), 细节此处略去, 利用伯努利不等式也是可以的。由此得到 $y < 1011, y > 1010$ 。

从此我们得到此时单增的充要条件 $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k \Leftrightarrow k \leq 1010$ 即最大值为 $k = 1011$ 。